

TRE CHIODI PER UNA CROCE

Piergiorgio Odifreddi

Settembre 1995

Le discussioni sulla natura della democrazia, e sul confronto fra essa ed altri sistemi, si svolgono spesso ad un bassissimo livello di razionalità: sembra infatti che in politica (come nello sport) chiunque abbia il dovere di avere opinioni su qualunque argomento, e il diritto di (fingere di) non vedere la loro natura pregiudiziale.

L'effetto di tale atteggiamento è evidente, oltre che sconsolante: i personaggi più improbabili popolano i parlamenti, e le loro improbabili opinioni ricevono la quotidiana esegesi di improbabili commentatori politici, e la conseguente attenzione di un improbabile pubblico.

Il lavoro di copertura svolto dai mezzi *di informazione* è anch'esso evidente, oltre che sottolineato dal loro eufemistico nome: se i regimi democratici avessero il coraggio della verità essi li chiamerebbero infatti *di propaganda* come facevano apertamente i regimi totalitari del passato, dallo Stato Pontificio (in cui il Sant'Uffizio era il Ministero di *Propaganda Fidei*) al Terzo Reich (in cui Goebbels era a capo del Ministero della Propaganda).

Non siamo dunque così ingenui da non sapere che le discussioni politiche hanno poco a che fare con la verità, e sono invece puramente strumentali e utilitariste. Non sarebbe allora particolarmente difficile, volendolo, smascherare la finzione democratica con argomenti di bassa razionalità, perfettamente adeguati alle mediocri discussioni politiche dei media.

Ad esempio, si potrebbe argomentare che la differenza fra i demonizzati sistemi a partito unico ed i canonizzati sistemi pluripartitici è puramente formale: la forbice politica tra Kruscev e Breznev nei primi anni '60, o tra Ligaciov e Gorbaciov negli ultimi anni '80, era infatti incomparabilmente più

⁰Testo di un intervento al *Seminario sulle decisioni collettive* dell'Istituto Banfi di Reggio Emilia, 20 Ottobre 1995.

ampia di quella tra Nixon e Kennedy o Bush e Clinton negli stessi periodi (o, volendo rimanere a casa nostra oggi, di quella tra Fini e d'Alema).

Analogamente, si potrebbe argomentare che l'Unione Sovietica si è rivelata essere, alla prova dei fatti, incomparabilmente più democratica dell'occidente, perchè la prima non ha impedito (ed ha anzi pilotato) un passaggio dal socialismo reale ad un capitalismo primitivo,¹ mentre il secondo non ha mai permesso al capitalismo di trasformarsi in socialismo.

Ma limitarsi alla razionalità 'bassa' non farebbe che portare acqua (sporca) all'oceano delle interminabili e inutili discussioni politiche, che ci dovrebbero interessare al più come fenomeno sociologico o distrazione balneare. Ciò che proponiamo di fare qui è invece di salire ad un piano di razionalità 'alta', mostrando come non appena si esca dal vago della propaganda politica per addentrarsi nella precisione dell'argomentazione matematica il concetto di democrazia si dissolva, come una pozza al sole.

Diritti

Qualunque cosa la democrazia sia o voglia essere, essa concerne il modo di sintetizzare scelte sociali a partire dalle preferenze individuali. Da un punto di vista matematico, un modo efficace e semplice di formalizzare il problema consiste nel considerare un insieme di alternative possibili: i dati saranno gli *ordini individuali* \leq_i che classificano le alternative secondo le preferenze e le indifferenze di ciascun individuo i , e il risultato dovrà essere un *ordine sociale* \leq_s che classifica le alternative secondo le preferenze e le indifferenze della società.

Scriveremo $A <_i B$ per indicare che l'individuo i preferisce B ad A , e $A =_i B$ per indicare che le due alternative gli sono indifferenti: così $A \leq_i B$ significa che i o preferisce B ad A , o esse gli sono indifferenti. Analogamente per $<_s$, $=_s$ e \leq_s .

I vari ordini dovrebbero rispecchiare almeno un minimo delle proprietà delle preferenze che vengono loro assegnate intuitivamente, e in particolare dovranno essere:

¹Lungi da noi suggerire che il passaggio abbia (avuto) una connotazione positiva: l'argomento è qui semplicemente che un sistema è tanto più 'democratico' quanto più è ampio lo spettro dei possibili cambiamenti che esso permette a se stesso (il massimo dei quali è appunto la dissoluzione del sistema, e la sua sostituzione con uno diverso).

- *Totali*: date due alternative A e B , o una di esse è preferita all'altra, o esse sono indifferenti. In simboli:

$$A <_i B \text{ o } B <_i A \text{ o } A =_i B$$

o, equivalentemente,

$$A \leq_i B \text{ o } B \leq_i A,$$

e analogamente per $<_s$ o \leq_s .

- *Transitivi*: date tre alternative A , B e C , se C è preferita a B e B è preferita ad A , allora C è preferita a A . In simboli:

$$A \leq_i B \text{ e } B \leq_i C \implies A \leq_i C,$$

e analogamente per \leq_s .

Inoltre, affinché si possa dire che l'ordine sociale rispecchia in qualche modo gli ordini individuali, dovrà almeno valere il *principio di unanimità* (introdotta da Wilfriedo Pareto): se tutti gli individui preferiscono un'alternativa tra A e B , la società non preferisce l'altra. In simboli:

$$A <_i B \text{ per ogni } i \implies A \leq_s B \quad \text{e} \quad B <_i A \text{ per ogni } i \implies B \leq_s A.$$

Avendo a disposizione gli ordinamenti individuale e sociale, si può formalizzare la nozione di *diritto* dicendo che un individuo i ha un diritto su A e B se, quand'egli preferisce una delle due alternative, la società fa altrettanto. In simboli:

$$A <_i B \implies A <_s B \quad \text{e} \quad B <_i A \implies B <_s A.$$

Infine, un individuo ha la *libertà di opinione* se può ordinare le alternative secondo l'ordine che preferisce.

Abbiamo appena incominciato a rendere precise le nozioni coinvolte nella democrazia, ed ecco apparire immediatamente il primo problema.

Teorema 1 (Sen, 1970)² *Se valgono sia il principio di unanimità che la libertà di opinione, al più un individuo può avere dei diritti.*

²Amartya Sen, *Collective choice and social welfare*, Holden-Day, 1970.

Dimostrazione. Supponiamo anzitutto che due individui 1 e 2 abbiano entrambi un diritto sulle stesse alternative A e B . Vogliamo costruire gli ordini individuali $<_1$ e $<_2$ in modo che

$$A <_s B <_s A,$$

così che l'ordine sociale non sia transitivo. Notiamo che:

- affinché si abbia $A <_s B$ è sufficiente che $A <_1 B$, poichè 1 ha un diritto su A e B ;
- affinché si abbia $B <_s A$ è sufficiente che $B <_2 A$, poichè 2 ha un diritto su A e B .

Basta allora che gli ordini personali di 1 e 2 siano i seguenti:

$$A <_1 B \quad \text{e} \quad B <_2 A,$$

il che è possibile per la libertà di opinione.

Supponiamo ora che un individuo 1 abbia un diritto su A e B , e l'individuo 2 abbia un diritto su A e C . Vogliamo costruire gli ordini individuali $<_1$ e $<_2$ in modo che

$$A <_s B \leq_s C <_s A.$$

Notiamo che:

- affinché si abbia $A <_s B$ è sufficiente che $A <_1 B$, poichè 1 ha un diritto su A e B ;
- affinché si abbia $B \leq_s C$ è sufficiente che $B <_1 C$ e $B <_2 C$, per il principio di unanimità;
- affinché si abbia $C <_s A$ è sufficiente che $C <_2 A$, poichè 2 ha un diritto su A e B .

Basta allora che gli ordini personali di 1 e 2 siano i seguenti:

$$A <_1 B <_1 C \quad \text{e} \quad B <_2 C <_2 A.$$

Supponiamo infine che l'individuo 1 abbia un diritto su A e B , e l'individuo 2 abbia un diritto su C e D . Vogliamo costruire gli ordini individuali \leq_1 e \leq_2 in modo che

$$A <_s B \leq_s C <_s D \leq_s A.$$

Notiamo che:

- affinché si abbia $A <_s B$ è sufficiente che $A <_1 B$, poichè 1 ha un diritto su A e B ;
- affinché si abbia $B \leq_s C$ è sufficiente che $B <_1 C$ e $B <_2 C$, per il principio di unanimità;
- affinché si abbia $C <_s D$ è sufficiente che $C <_2 D$, poichè 2 ha un diritto su C e D ;
- affinché si abbia $D \leq_s A$ è sufficiente che $D <_1 A$ e $D <_2 A$, per il principio di unanimità.

Basta allora che gli ordini personali di 1 e 2 siano i seguenti:

$$D <_1 A <_1 B <_1 C \quad \text{e} \quad B <_2 C <_2 D <_2 A. \quad \square$$

In altre parole, la libertà di opinione è fine a se stessa: la società può infatti al massimo essere vincolata a tener conto delle preferenze di un solo individuo, e può andar contro alle preferenze di ciascun altro.

Votazioni

La democrazia non si limita comunque a dichiarare di voler sintetizzare le preferenze individuali in un ordine collettivo: essa pretende anche di farlo mediante votazioni, che spesso (ad esempio nei referendum, nei secondi turni delle elezioni maggioritarie, nelle votazioni parlamentari, ...) prendono la forma di scelta fra due alternative.

In questo caso si usa implicitamente un *principio di dipendenza dal voto*, secondo cui la scelta della società fra due alternative viene fatta soltanto in base alle preferenze degli individui rispetto ad esse. In altre parole, \leq_s su A e B dipende soltanto dai vari \leq_i su A e B .

In queste condizioni, i problemi della democrazia diventano ancora più gravi.

Teorema 2 (Arrow, 1951)³ *Se valgono sia i principi di unanimità e di dipendenza dal voto che la libertà di opinione, allora esiste un dittatore.*

³Kenneth Arrow, *Social choice and individual values*, Yale University Press, 1951.

Dimostrazione. Consideriamo due alternative A e B non indifferenti per la società, tali cioè che $A <_s B$ o $B <_s A$. Se nessuno avesse un diritto su A e B , per ogni individuo i si avrebbe o $A <_i B$ ma $A \not<_s B$ (cioè $B <_s A$), o $B <_i A$ ma $B \not<_s A$ (cioè $A <_s B$). Per la dipendenza dal voto, per determinare l'ordine sociale su A e B è sufficiente specificare gli ordini individuali su di esse: consideriamo allora la situazione in cui ciascun individuo ha la preferenza individuale che determina un ordine sociale contrario. Essi devono tutti avere la stessa preferenza, perchè non si può avere contemporaneamente $A <_s B$ e $B <_s A$: quindi ad esempio si ha $A <_i B$ per ogni individuo e $B <_s A$, ma questo va contro il principio di unanimità.

Dunque, per ogni coppia di alternative non indifferenti per la società deve esistere un individuo che ha un diritto su di esse. Ma, per il teorema 1, al massimo un individuo può avere dei diritti: per ogni coppia di tali alternative è allora sempre lo *stesso* individuo ad avere diritti su di esse. Egli è quindi un dittatore, perchè è l'unico ad avere diritti, e li ha su ogni possibile coppia di alternative non socialmente indifferenti. \square

Quindi il tandem della libertà di opinione e del meccanismo della votazione, che sembrerebbe caratterizzare la democrazia come essa viene intesa nell'occidente, ha le ruote bucate: le decisioni sociali riflettono le preferenze di uno solo degli individui, e sempre dello stesso.

Seggi

I due teoremi precedenti dovrebbero già aver colpito a morte le finzioni che si annidano dietro i discorsi sulla democrazia, ma vogliamo dar loro un colpo di grazia. Questa volta ci interesseremo del modo in cui vengono distribuiti i seggi nelle elezioni, sia ai collegi elettorali in base alla popolazione, che ai partiti in base ai voti (ovviamente entrambi i problemi si pongono in una elezione, uno prima del voto e l'altro dopo, e le soluzioni adottate sono codificate nelle leggi elettorali).

Poichè il numero dei seggi è ovviamente molto inferiore al numero di elettori o di votanti, la divisione non sarà in genere un numero intero. Affinchè sia equa, essa dovrà avvenire secondo un *principio di proporzionalità*: il numero di seggi assegnato ad un collegio o ad un partito dovrà essere una delle due approssimazioni intere (per difetto, o per eccesso) del numero razionale che si ottiene dalla divisione. Se ad esempio i seggi da distribuire sono 10 ed

un collegio ha un terzo della popolazione, i seggi ad esso assegnati dovranno dunque essere 3 o 4.⁴

Mentre la proporzionalità riguarda la consistenza dei collegi o dei partiti presi singolarmente, il *principio di monotonicità* riguarda la loro consistenza relativa: esso richiede che un collegio con più elettori o un partito con più voti non ricevano meno seggi di un altro con meno. E questo dovrebbe valere sia per le situazioni sincroniche relative ad una singola elezione (misurate dalle percentuali), che per le situazioni diacroniche relative ad elezioni in tempi diversi (misurate dai rapporti fra le percentuali).

Possiamo ormai aspettarci che, al solito, anche queste condizioni minimali siano impossibili da soddisfare.

Teorema 3 (Balinski e Young, 1982)⁵ *Non esiste nessun metodo di distribuzione dei seggi che soddisfi i principi di proporzionalità e di monotonicità.*

Dimostrazione. Supponiamo che ci siano almeno 4 collegi, che i seggi da distribuire siano almeno 7, e che i risultati delle divisioni del numero dei seggi per il numero degli elettori di ciascun collegio in due elezioni siano i seguenti, dove $\varepsilon > 0$:

collegi	prima elezione	seconda elezione
<i>A</i>	$5 + \varepsilon$	$4 - \varepsilon$
<i>B</i>	$\frac{2}{3}$	2
<i>C</i>	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
<i>D</i>	$\frac{2}{3} - \varepsilon$	$\frac{1}{2} + \varepsilon$
totale	7	7

Nella prima elezione il collegio *A* deve ricevere almeno 5 seggi: poichè ne rimangono al massimo 2, essi non potranno andare al collegio *D* per monotonicità, perchè esso ha una percentuale più bassa dei collegi *B* e *C*.

⁴Naturalmente, il principio di proporzionalità non è neppure preso in considerazione dalle leggi elettorali maggioritarie, che hanno i loro bei problemi comunque. Ad esempio, è possibile che un partito con quasi il 50% dei voti nazionali non prenda neppure un seggio, e che ogni seggio vada solo a partiti con una minima rappresentanza nazionale: basta infatti che in ciascun collegio uno stesso partito nazionale ottenga il 50% dei voti meno 1, e che un partito locale ottenga il 50% dei voti più 1 affinché il seggio vada al secondo.

⁵Michel Balinski e Peyton Young, *Fair representation*, Yale University Press, 1982.

Nella seconda elezione il collegio A può ricevere al massimo 4 seggi, ed il collegio B al massimo 2: poichè ne rimane almeno 1, esso dovrà andare al collegio D per monotonicità, perchè esso ha una percentuale più alta del collegio C .

Nel passaggio dalla prima alla seconda elezione il collegio A ha quindi perso almeno un seggio, ed il collegio D ne ha guadagnato almeno uno. Il principio di monotonicità richiede allora che il collegio A abbia perso in percentuale relativamente al collegio D , e cioè che

$$\frac{4 - \varepsilon}{\frac{1}{2} + \varepsilon} < \frac{5 + \varepsilon}{\frac{2}{3} - \varepsilon},$$

il che è possibile solo se $\varepsilon > \frac{1}{61}$. Scegliendo $\varepsilon \leq \frac{1}{61}$ si ha dunque una contraddizione. \square

Per fissare le idee, un esempio numerico di distribuzione di seggi che parrebbe equo, ma che fa perdere un seggio ad A e ne fa acquistare uno a D , nonostante A sia cresciuto rispetto a D da circa 7,5 volte a circa 8 volte è il seguente:

collegi	%	seggi	%	seggi
A	5,01	5	3,99	4
B	0,67	1	2,00	2
C	0,67	1	0,50	0
D	0,65	0	0,51	1

Conclusione

Le argomentazioni matematiche precedenti hanno mostrato che il concetto ingenuo di democrazia, di cui parlano i politici ed i mezzi di propaganda, non esiste. Sarebbe però altrettanto ingenuo considerare questo come un punto di arrivo, invece che come un punto di partenza: una volta accertato che il significato della democrazia non è quello apparente, rimane infatti da scoprire quale ne sia quello sostanziale.

Se, come suggerisce Wittgenstein, il significato di una parola è il suo uso, potremo arrivare a capire che cosa è la democrazia smettendo di badare alle cose che i suoi grandi sacerdoti ne dicono, e incominciando ad osservare

quelle che essi fanno. Temiamo che questa nuova prospettiva ci rivelerà un significato molto meno eroico della democrazia, ma svegliarsi dai sogni è pur necessario per incominciare a vivere nella realtà.