Indice

1 Introduzione

L'idea di studiare i problemi di inseguimento è sorta leggendo un testo di M. Gardner [1], il grande divulgatore che curò dal 1956 al 1981 sul *Scientific American* una rubrica di giochi matematici. Spesso molti matematici puri non sono d'accordo con il valore non solo pedagogico della matematica ricreativa, poiché la ritengono sterile e fine a se stessa. Nel mio caso è successo esattamente l'opposto.

Leggendo il problema delle quattro coccinelle c'era qualcosa che non mi convinceva. La traiettoria era fornita dall'autore. Io volevo ottenere lo stesso risultato analiticamente. Non conoscevo ancora i sistemi di equazioni differenziali e le tecniche per risolverli. La mia idea era quella di semplificare il problema lasciando libera la traiettoria di una delle coccinelle e imponendo all'altra le stesse condizioni di inseguimento del problema di Gardner: la direzione e il verso son quelli ovvi, le due velocità uguali in modulo.Così facendo, invece di semplificare il problema l'ho reso più generale. Usando diversi metodi ho risolto il problema degli n insetti. Quindi mi son dedicato al problema degli inseguimenti in $\mathbb{R}^n$, ottenendo un risultato che risulta essere molto utile sia per il problema degli insetti sia per i problemi che coinvolgono distanze limite. La formula (30) è una legge di conservazione che vale per ogni inseguimento che abbia le modalità descritte poc'anzi. Probabilmente sarà possibile generalizzare la formula in casi più generali, in cui non è fissato a priori il rapporto tra le due velocità. Inoltre, ho proposto la soluzione di altri due problemi. Uno di questi, il problema 3 delle due navi, fa parte anch'esso di una raccolta di quesiti di matematica ricreativa, raccolti da Steinhaus [3]. Come vedremo, avrà una soluzione elementare, cioè che non fa uso dell'analisi, e una soluzione analoga, ma ottenuta utilizzando la formula di conservazione e alcune considerazioni di tipo geometrico. Il problema 4 non può essere risolto elementarmente ma è interessante poichè mostra che in qualche caso, pur con qualche trucco, è possibile risolvere esplicitamente il problema di Cauchy che si ottiene imponendo le condizioni di inseguimento. Infine ho raccolto una serie di risultati recenti e di idee che permetterebbero di proseguire lo studio dei problemi di inseguimento a livelli anche molto alti.

Vorrei ringraziare il Prof. Zanolin F., che mi ha sempre supportato e ha accettato di buon grado di lavorare su questo mio problema e il prof. Gorni G., che mi ha aiutato per quanto riguarda l'utilizzo di LaTeX e di *Mathematica*.

2 Il problema degli n insetti

Cominciamo con l'enunciazione di un problema di cui ci occuperemo alla fine della sezione 2.

Problema 1 (degli n insetti). *Siano dati n insetti disposti ai vertici di un n-agono regolare unitario (cioé inscritto in un cerchio di raggio* 1*) al tempo* $t = 0$*. Ciascun insetto si muove verso quello che lo precede in senso antiorario (oppure in verso orario, il problema è simmetrico). Determinare le equazioni del moto degli insetti.*

Come ho già anticipato, una versione semplificata del problema era stata proposta da Martin Gardner [1]. In realtà, Gardner non chiede di trovare la traiettoria, ma solo la distanza percorsa dagli insetti prima di raggiungersi. Questo sarà un aspetto che esamineremo in un secondo momento.

2.1 Il caso $n = 4$ e il problema di Martin Gardner

Problema 2 (delle 4 coccinelle). *Siano date quattro coccinelle* A_1, A_2, A_3, A_4*, situate ai vertici di un quadrato di lato* 2 *al tempo* $t = 0$*. Ciascuna si muove verso la coccinella che la precede:* A_1 *verso* A_2*,* A_2 *verso* A_3*,* A_3 *verso* A_4*,* A_4 *verso* A_1*. Trovare l'equazione del moto delle 4 coccinelle.*

Soluzione. Visto che i 4 punti si muovono nel tempo, è una buona idea chiamare $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$, $A_4(t)$ le posizioni dei quattro punti in un generico istante t. Inseriamo un sistema di riferimento cartesiano in modo che

$$\begin{cases} A_1(0) = (1, 1) \\ A_2(0) = (1, -1) \\ A_3(0) = (-1, -1) \\ A_4(0) = (-1, 1) \end{cases} \tag{1}$$

La situazione iniziale è la seguente:

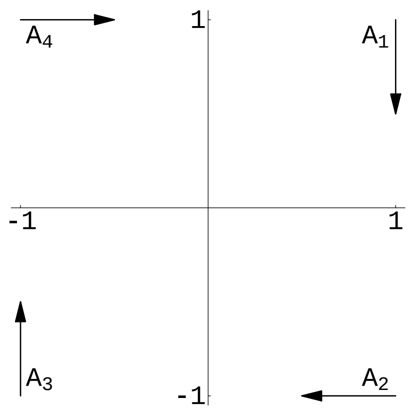


Figura 1: Posizione iniziale

La posizione della i-esima coccinella all'istante t sarà:

$$A_i(t) = \big(x_i(t), y_i(t)\big) \quad \text{per} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Sappiamo anche la direzione di ciascuna coccinella. Infatti $A_i(t)$ si dirige verso $A_{i+1}(t)$[1], cioé $A_i'(t)$ è un multiplo di $A_{i+1}(t) - A_i(t)$.
Quindi otteniamo il seguente sistema a 4 equazioni differenziali vettoriali e 4 incognite (le funzioni vettoriali A_i):

$$A_i'(t) = \xi_i\big(A_{i+1}(t) - A_i(t)\big) \quad \text{per} \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{2}$$

dove[2] $\xi_i = \xi_i(A_1(t), A_2(t), A_3(t), A_4(t), t)$, $\xi_i : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Inoltre, per simmetria, gli ξ_i saranno tutti uguali tra loro. Unendo il sistema (2) ai valori iniziali (1) e considerando $\xi_i \equiv 1 \quad \text{per} \quad i = 1, 2, 3, 4$, otteniamo il seguente problema di Cauchy, la cui soluzione risolve il nostro problema iniziale:

$$\begin{cases} A_i'(t) = A_{i+1}(t) - A_i(t) \quad \text{per} \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ A_1(0) = (1, 1) \\ A_2(0) = (1, -1) \\ A_3(0) = (-1, -1) \\ A_4(0) = (-1, 1) \end{cases} \tag{3}$$

Riscrivendo il sistema (2) componente per componente e con un paio di operazioni algebriche, si ottiene:

$$\begin{cases} x_i'(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t) \\ y_i'(t) = y_{i+1}(t) - y_i(t) \end{cases} \tag{4}$$

Il sistema (4) è un sistema a 8 equazioni differenziali, che possono essere raggruppate 4 a 4, per l'indipendenza delle x_i dalle y_i. Otteniamo la seguente coppia di sistemi di equazioni differenziali non vettoriali (stavolta scritti per intero):

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) - x_1(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) - x_2(t) \\ x_3'(t) = x_4(t) - x_3(t) \\ x_4'(t) = x_1(t) - x_4(t) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) - y_1(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) - y_2(t) \\ y_3'(t) = y_4(t) - y_3(t) \\ y_4'(t) = y_1(t) - y_4(t) \end{cases}$$

I due sistemi sono identici. Tuttavia cambiano le condizioni iniziali. Possiamo limitarci a studiare uno solo dei due sistemi, salvo poi prestare attenzione alla determinazione dei parametri.
Notiamo inoltre che il problema è dotato di simmetria rotazionale: come si vede dalla figura 1, se effettuo una rotazione di un angolo piatto ottengo $x_1 = -x_3$ e $x_2 = -x_4$ (e le stesse relazioni valgono per la y). Con queste considerazioni possiamo scrivere il seguente sistema, equivalente a quello già considerato:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) - x_1(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$$

Derivando e sostituendo posso disaccoppiare le equazioni:

$$\begin{cases} x_1''(t) = x_2'(t) - x_1'(t) \\ x_2''(t) = -x_1'(t) - x_2'(t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1''(t) = -2x_1'(t) - 2x_1(t) \\ x_2''(t) = -2x_2'(t) - 2x_2(t) \end{cases}$$

[1]Per praticità, e per non appesantire troppo la discussione, considererò $A_{4+1}(t) = A_1(t)$. In questo modo posso evitare di scrivere interminabili sistemi di equazioni differenziali.
[2]confrontare con la formula (16)

Si tratta di risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x_1''(t) = -2x_1'(t) - 2x_1(t) \\ x_1(0) = 1 \\ x_1'(0) = x_2(0) - x_1(0) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Analoghi problemi di Cauchy si ottengono per ciascuna delle rimanenti $x_i(t)$ e per le $y_i(t)$. Una soluzione del sistema è $x_1(t) = e^{\lambda t}$, con λ da determinare.

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\lambda e^{\lambda t} + 2e^{\lambda t} = 0$$

Essendo $e^{\lambda t} \neq 0$, possiamo dividere e ottenere la seguente relazione per λ:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \pm \sqrt{-1} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \pm i$$

La generica soluzione al sistema (5) sarà nella forma $x_1(t) = e^{-t}(\alpha e^{it} + \beta e^{-it})$, con α e β da determinare tramite le condizioni iniziali. Per le altre x_i e per le y_i il procedimento è analogo. Derivando e sostituendo le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} x_1(0) = 1 = \alpha + \beta \\ x_1'(0) = x_2(0) - x_1(0) = 0 = (1-i)\alpha - (i+1)\beta \end{cases}$$

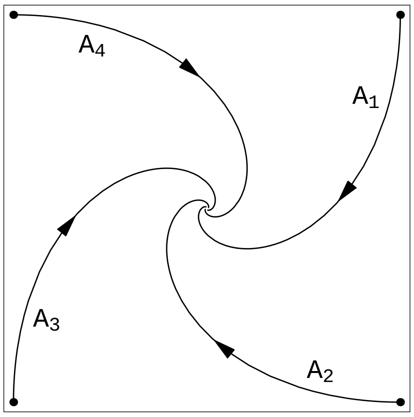
Da cui $\alpha = \frac{1-i}{2}$ e $\beta = \frac{1+i}{2}$. Sostituendo nuovamente si ottiene:

$$x_1(t) = e^{-t}(\sin t + \cos t)$$

Analogamente si ottengono le stesse relazioni per le rimanenti funzioni incognite, che risolvono il problema (3):

$$\begin{cases} A_1(t) = (e^{-t}(\cos t + \sin t), e^{-t}(\cos t - \sin t)) \\ A_2(t) = (e^{-t}(\cos t - \sin t), -e^{-t}(\cos t + \sin t)) \\ A_3(t) = (-e^{-t}(\cos t + \sin t), -e^{-t}(\cos t - \sin t)) \\ A_4(t) = (-e^{-t}(\cos t - \sin t), e^{-t}(\cos t + \sin t)) \end{cases}$$

Sono queste le traiettorie delle coccinelle, scritte in forma parametrica. Rappresentano delle spirali logaritmiche, come si può anche vedere dal grafico:



□

Come già anticipato, Gardner non chiede di trovare la traiettoria delle coccinelle, ma solo la distanza percorsa dalle coccinelle prima di incontrarsi. In questo caso il problema è sorprendentemente semplice: per simmetria, in ogni istante le 4 coccinelle si trovano ai vertici di un quadrato il cui lato si va restringendo. Il percorso di una coccinella inseguitrice sarà sempre perpendicolare a quello della coccinella inseguita. Ma allora mentre A_1 si avvicina a A_2, non c'è alcuna componente del moto di A_2 che la avvicini o la allontani da A_1 e dal punto di vista di A_1, A_2 potrebbe benissimo stare ferma. Quindi A_1 raggiungerà A_2 nello stesso tempo che occorrerebbe se A_2 rimanesse ferma[3]. Allora la lunghezza di ogni braccio di spirale è pari alla lunghezza del lato del quadrato iniziale e cioè 2. Questo risultato può essere dimostrato anche analiticamente. Sia $L(\tau)$ la lunghezza del braccio di spirale percorsa dalla prima coccinella fino al tempo τ. Calcoliamo questo valore:

$$\begin{aligned} L(\tau) &= \int_0^\tau \|A_1'(t)\| \, dt = \int_0^\tau \sqrt{\left(-2e^{-t}\sin t\right)^2 + \left(2e^{-t}\cos t\right)^2} \, dt = \\ &= \int_0^\tau \sqrt{4e^{-2t}} \, dt = \int_0^\tau 2e^{-t} \, dt = \left[-2e^{-t}\right]_0^\tau = -2e^{-\tau} + 2 \end{aligned}$$

Quindi si vede immediatamente che se $\tau \to \infty$ allora $L(\tau) \to 2$, che è lo stesso valore ottenuto senza calcolare l'integrale.

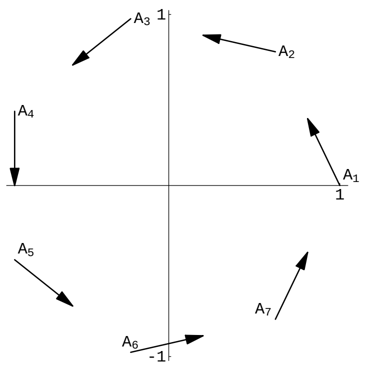
2.2 Il caso generale e il caso limite

È abbastanza naturale chiedersi cosa succede se invece di 4 coccinelle abbiamo n insetti[4] che si comportino nello stesso modo. Si tratta di risolvere il problema 1. Come vedremo, alcune tecniche usate nel problema 2 torneranno utili.

Soluzione [del problema 1]. Come nel problema precedente, abbiamo bisogno di un sistema di riferimento adeguato. È una buona idea lavorare nel piano dei numeri complessi. Infatti, ciascun insetto sarà posto inizialmente su una delle radici n-esime dell'unità. Pertanto

$$A_j(0) = e^{\frac{2\pi i}{n}(j-1)}$$

dove $A_j(t)$ è la posizione del j-esimo insetto all'istante t. La situazione iniziale sarà la seguente[5]:



[3]Una spiegazioni formale di questo ragionamento si trova nella nota che segue la formula (30)
[4]Un'altra generalizzazione è quella data da Klamkin e Newman[2]
[5]nel caso in cui $n = 7$

Per l'evidente simmetria rotazionale del problema, si ha la seguente relazione:

$$A_j(t) = A_1(t)e^{\frac{2\pi i}{n}(j-1)} \tag{6}$$

Per praticità di notazione, prendiamo $z_j(t) := A_j(t)$, con $z_j : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$.
Le condizioni di inseguimento sono analoghe a quelle del problema precedente:

$$z_j'(t) = z_{j+1}(t) - z_j(t)$$

Quindi dobbiamo risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} z_j'(t) = z_{j+1}(t) - z_j(t) \\ z_j(0) = e^{\frac{2\pi i}{n}(j-1)} \end{cases} \quad \text{per} \quad j = 1, \dots, n \tag{7}$$

Utilizzando la condizione (6) con $j = 2$:

$$z_2(t) = z_1(t)e^{\frac{2\pi i}{n}(2-1)} = z_1(t)e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

rielaborando il sistema (7) e disaccoppiando le prima equazione, otteniamo il seguente problema di Cauchy semplificato:

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t) - z_1(t) = z_1(t)e^{\frac{2\pi i}{n}} - z_1(t) = z_1(t)(e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1) \\ z_1(0) = e^{\frac{2\pi i}{n}} \end{cases} \tag{8}$$

Grazie alla condizione (6), risolvere questo problema di Cauchy è equivalente a risolvere il problema (7). Quindi poniamo $z(t) := z_1(t)$ e $\alpha = \frac{2\pi}{n}$. Ora usiamo una nota uguaglianza:

$$z(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$$

Riscriviamo il problema (8) tramite la suddetta uguaglianza[6]:

$$\begin{cases} z' = z(e^\alpha - 1) \\ z(0) = e^\alpha \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho' e^{i\theta} + i\theta' \rho e^{i\theta} = \rho e^{i\theta}(e^\alpha - 1) \\ \rho(0) = 1 \\ \theta(0) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Come nel problema precedente, $e^{i\theta(t)} \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Quindi dividiamo per $e^{i\theta}$:

$$\varrho' + i\rho\theta' = \rho(e^{i\alpha} - 1) \tag{10}$$

Utilizzando la formula di Eulero $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, separiamo parte reale e parte immaginaria nell'equazione (10)

$$\begin{cases} \rho'(t) = \rho(t)(\cos\alpha - 1) \\ \theta'(t) = \sin\alpha \end{cases}$$

Le due equazioni hanno soluzione immediata:

$$\rho(t) = \rho(0)e^{-(1-\cos\alpha)t} = e^{-(1-\cos\alpha)t} \tag{11}$$

$$\theta(t) = \theta(0) + t\sin\alpha = t\sin\alpha \tag{12}$$

[6] e omettendo l'argomento t per chiarezza

Quindi, esplicitando t dalla (12) e sostituendolo nella (11):

$$\rho(\theta) = e^{-\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\theta} \tag{13}$$

che è la traiettoria, scritta in forma parametrica, del primo insetto. Riutilizzando la formula di Eulero si ottiene:

$$z(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)} = e^{-(1-\cos\alpha)t}e^{it\sin\alpha} = e^{-t}e^{(\cos\alpha + i\sin\alpha)t} = e^{(e^{i\alpha}-1)t} \tag{14}$$

Quindi le soluzioni del problema di Cauchy iniziale sono:

$$\begin{cases} A_1(t) = e^{(e^{i\alpha}-1)t} \\ A_j(t) = A_1(t)e^{\alpha(j-1)} = e^{(e^{i\alpha}-1)t+\alpha(j-1)} \quad \text{per} \quad j = 2, \dots, n \\ \alpha = \frac{2\pi}{n} \end{cases}$$

e queste sono anche le soluzioni al problema degli n insetti $\square$

Come nel problema (2), ci chiediamo ora quale distanza percorrono gli insetti, prima di incontrarsi. La risposta non è così immediata come nel caso precedente[7] e richiede un breve calcolo. Sia $L(\tau)$ la distanza percorsa fino all'istante τ e assumiamo $A(t) = A_1(t)$ poichè tutti gli insetti percorreranno la stessa distanza:

$$\begin{aligned} L(\tau) &= \int_0^\tau \|A'(t)\|\, dt = \int_0^\tau \left\|(e^{i\alpha}-1)e^{(e^{i\alpha}-1)t}\right\| dt = \\ &= \int_0^\tau \left\|(\cos\alpha - 1 + i\sin\alpha)e^{t(\cos\alpha-1)}e^{it\sin\alpha}\right\| dt = \\ &= \int_0^\tau \left\|(\cos\alpha - 1 + i\sin\alpha)e^{t(\cos\alpha-1)}\right\| dt = \\ &= \int_0^\tau e^{t(\cos\alpha-1)}\sqrt{(\cos\alpha-1)^2 + (\sin\alpha)^2}\, dt = \int_0^\tau e^{t(\cos\alpha-1)}\sqrt{2(1-\cos\alpha)}\, dt = \\ &= \left[-\sqrt{\frac{2}{1-\cos\alpha}}e^{t(\cos\alpha-1)}\right]_0^\tau = -e^{\tau(\cos\alpha-1)}\sqrt{\frac{2}{1-\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{2}{1-\cos\alpha}} \end{aligned}$$

Possiamo così stabilire che la lunghezza totale del percorso di ogni insetto è

$$\lim_{\tau\to\infty} L(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} -e^{\tau(\cos\alpha-1)}\sqrt{\frac{2}{1-\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{2}{1-\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{2}{1-\cos\alpha}} \tag{15}$$

Infine, è interessante capire cosa succede quando facciamo tendere n a infinito. Gli insetti si addensano lungo la circonferenza. Per studiare analiticamente questa parte, è utile riprendere la soluzione che avevamo ottenuto in (13). Notiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \alpha = 0$$

L'equazione (13) quando $\theta = \pi$ e $n \to \infty$ diventa:

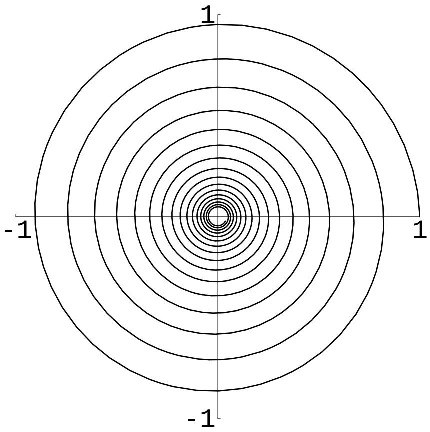
$$\rho_\alpha(\pi) = e^{-\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\pi}$$

[7] anche se è possibile utilizzare la formula 30 come farò nella nota successiva alla suddetta formula

e

$$\lim_{n\to+\infty}\rho_\alpha(\pi)=\lim_{n\to+\infty}e^{-\frac{1-cos(\alpha)}{sen(\alpha)}\pi}=\lim_{\alpha\to 0}e^{-\frac{1-cos(\alpha)}{sen(\alpha)}\pi}=1$$

Pertanto, il primo insetto rimane a distanza 1 dal centro anche dopo aver fatto mezzo giro. Notiamo però che la velocità angolare dei singoli insetti tende a 0. Inoltre, per concludere lo studio asintotico, vediamo cosa succede a $L_n(\tau)$ quando $\tau\to\infty$. Il denominatore della frazione tende a 0, quindi $L_n(\tau)\to+\infty$. Vediamo graficamente qual è il percorso di $A_1(t)$, quando $n=100$:



Sembra abbastanza evidente, anche da un punto di vista intuitivo e grafico, che il percorso degli insetti si allunghi sempre più.
Questo conclude lo studio dei problemi di inseguimento simmetrici. Nel prossimo capitolo analizzeremo un altro caso di inseguimento, ispirato da un altro problema abbastanza noto.

3 L'equazione inseguitrice

Come anticipato, in questo paragrafo mi occuperò di un altro tipo di problemi di inseguimento. Vediamo due problemi simili che hanno ispirato due diversi aspetti di questa trattazione[8].

Problema 3 (delle due navi). *La nave P vede la nave Q che naviga con rotta perpendicolare a PQ e che anche in seguito continua a navigare nella stessa direzione. P insegue Q puntando costantemente su di essa; entrambe le navi hanno in ogni momento la stessa velocità (ma essa può variare nel tempo). È evidente che P descrive una linea curva e che, se l'inseguimento dura a lungo, la scia della nave inseguitrice si porta su quella della nave inseguita. Qual è a questo punto la distanza PQ, se all'inizio era uguale a 10 miglia nautiche?*

Problema 4 (della lepre e del cane). *Una lepre attraversa un campo con un moto rettilineo uniforme. Un cane la vede e parte all'inseguimento, puntanto sempre verso la lepre. Trovare la traiettoria del cane, sapendo che le due velocità sono uguali in ogni istante e che il cane parta nel momento in cui la traiettoria della lepre sia perpendicolare al suo sguardo.*

I due problemi sono identici per quanto riguarda l'aspetto dinamico dell'inseguimento. Ma leggendoli attentamente si notano alcune differenze che portano a considerare aspetti diversi di questo tipo di problemi.
Infatti, il problema 3 chiede di trovare la distanza limite che separerà le due navi per $t \to \infty$. Il problema 4 chiede di trovare la traiettoria percorsa dal cane. Questa richiesta è molto simile a quella del problema degli n insetti.
Nel corso di questo paragrafo, esamineremo brevemente i problemi di inseguimento in generale, per poi passare immediatamente a un caso particolare: quello in cui *inseguito* e *inseguitore* hanno la stessa velocità in norma.

3.1 L'equazione inseguitrice generale

Le curve d'inseguimento sono state molto studiate in passato da Leonardo[4, 5] e in tempi molto più recenti[6, 7, 8]. In generale, sia dato un corpo A che si muove in $\mathbb{R}^n$ con traiettoria rappresentata parametricamente da $x(t)$. Sia B un altro corpo posto nel punto (a, b) all'istante $t = 0$, la cui traiettoria (incognita) sarà $y(t)$, con $x, y : [0, \infty[\to \mathbb{R}^n$. Più in generale, la condizione di inseguimento si ha quando la direzione della traiettoria di B è rivolta verso A. Sia quindi $\alpha = \alpha(x(t), y(t), x'(t), t) = \alpha(t)$ e $\alpha : [0, \infty[\to \mathbb{R}$. La situazione è la seguente:

$$y'(t) = \alpha(x(t) - y(t)) \tag{16}$$

Nei vari problemi proposti, le velocità di inseguitore e inseguito sono uguali in norma. Pertanto mi limiterò a studiare il caso in cui $\|y'\| = \|x'\|$. Vediamo come deve essere fatta α:

$$\|x'\| = \|y'\| = \|\alpha(x - y)\| = \alpha \|x - y\|$$

Cioè

$$\alpha = \frac{\|x'\|}{\|x - y\|} \tag{17}$$

[8]il problema 3 è stato posto da H.Steinhaus[3] mentre il problema 4 è un problema molto noto

Sostituendo la (17) nella (16), otteniamo la seguente:

$$y'(t) = \frac{x(t) - y(t)}{\|x(t) - y(t)\|} \|x'(t)\| \tag{18}$$

Trattandosi di moti di corpi nello spazio, è un'ipotesi ragionevole supporre $x(t) \in \mathcal{C}^1$ e $y(0) = (a, b) \neq x(0)$. Poniamo $z(t) := x(t) - y(t)$. Avremo anche $z'(t) = x'(t) - y'(t)$. Con questo cambio di variabile, possiamo riscriverci l'equazione (18) e la condizione iniziale:

$$\begin{cases} z' = x' - \dfrac{z}{\|z\|} \|x'\| \\ z(0) = z_0 \neq 0 \end{cases} \tag{19}$$

Definiamo ora $D := [0, \infty[\times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e quindi $F : D \to \mathbb{R}^n$ nel modo seguente:

$$F(t, z) := x' - \frac{z}{\|z\|} \|x'\| \tag{20}$$

la funzione F così definita è chiaramente continua. Di più, poichè $\dfrac{\partial F(t, z)}{\partial z}$ esiste continua su tutto D, la F è localmente lipschitziana. Dunque sono soddisfatte le ipotesi di un noto teorema di esistenza e unicità locale[9]. Quindi esiste ed è unica la soluzione al seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = F(t, z) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \tag{21}$$

definita su un intervallo massimale $[0, \beta[$, in cui $\beta = \beta_{z_0} > 0$.
Inoltre osserviamo quanto segue:

$$\|F(t, z)\| = \left\| x' - \frac{z}{\|z\|} \|x'\| \right\| \leq \|x'\| + \left\| \frac{z}{\|z\|} \right\| \|x'\| = \|x'\| + \frac{\|z\|}{\|z\|} \|x'\| = 2 \|x'\| \tag{22}$$

Se $\beta = +\infty$, allora la soluzione ha esistenza globale nel futuro. Se invece $\beta < +\infty$, allora abbiamo il seguente teorema:

Teorema 1. *Sia $z(t)$ una soluzione al problema di Cauchy (21) definita su un intervallo massimale $[0, \beta[$. Se $\beta < +\infty$, allora $\|z(t)\| \to 0$ per $t \to \beta^-$. Cioé*

$$\lim_{t \to \beta^-} y(t) = y(\beta) = x(\beta)$$

dove $y(t) := x(t) - z(t)$

Dimostrazione. Sia quindi $\beta < \infty$ e siano $0 < t_1, t_2 < \beta$. Utilizzando la (22), abbiamo che

$$\|z(t_1) - z(t_2)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} z'(t)\, dt \right\| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \|z'(t)\|\, dt \right| \leq 2 \left| \int_{t_1}^{t_2} \|x'(t)\|\, dt \right| \tag{23}$$

Utilizziamo il criterio di convergenza di Cauchy per le funzioni:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \,:\, \forall t_1, t_2 \in]\beta - \delta, \beta[\text{ si ha } \|z(t_1) - z(t_2)\| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{t \to \beta^-} z(t) \in \mathbb{R}^n \tag{24}$$

[9] vedi teorema (3.1) di Hale[9]

Vediamo che vale l'ipotesi.
Siano $\varepsilon > 0$ e $L_\beta = \|x'(\beta)\|$. Scelgo $\delta_1 > 0$. Abbiamo che $\forall\delta \in [\beta - \delta_1, \beta] \quad \|x'(t)\| \leq L_\beta + 1$, per la continuità della $x(t)$. Pertanto, utilizzando la (23):

$$\|z(t_1) - z(t_2)\| \leq 2\left|\int_{t_1}^{t_2} \|x'(t)\|\, dt\right| \leq 2(L_\beta + 1)\,|t_2 - t_1| < \varepsilon \tag{25}$$

Siccome sia ε che L_β son fissati, è sufficente prendere $\delta = \min\left\{\delta_1, \dfrac{\varepsilon}{2\,(L_\beta + 1)}\right\}$. Un tale δ soddisfa la (24). Quindi esiste il $\lim\limits_{t\to\beta^-} z(t)$.
Inoltre:

$$\|z(t)\| - \|z_0\| \leq \|z(t) - z_0\| \leq 2\left|\int_0^t \|x'(s)\|\, ds\right|$$

Pertanto

$$\|z(t)\| \leq \|z_o\| + 2\left|\int_0^t \|x'(s)\|\, ds\right| \leq \|z_0\| + 2\left|\int_0^\beta \|x'(s)\|\, ds\right| =: M_{\beta,z_0}$$

Quindi $\exists M > 0$ tale che $\|z(t)\| \leq M$, $\forall t \in [0, \beta]$.
Allora $z(t)$ è sempre compreso in $\mathcal{E} := \mathcal{B}(0, M) \cap \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, che è un compatto. Utilizziamo il teorema di uscita dai compatti, il quale afferma che se ho una soluzione massimale $z(t)$ definita su un intervallo aperto e un compatto $K \subseteq D$ allora $(t, z(t))$ esce definitivamente da K. In virtù di questo teorema $z(t)$ deve uscire da $\mathcal{E}$. Quindi $z(t) \to 0$ poichè $0 \notin \mathcal{E}$ ed è l'unico punto a distare da 0 meno di M. Allora $\|z(t)\| \to 0$. □

Abbiamo dimostrato che la soluzione del problema (21) ha esistenza globale nel futuro , oppure esiste fino a un momento β in cui $y(\beta) = x(\beta)$, cioè si ha la collisione tra i due corpi. Vogliamo ora trovare delle condizioni per l'esistenza della collisione.
A questo proposito, studiamo la funzione $\rho(t) := \|z(t)\| = \|x(t) - y(t)\|$, $\rho : [0, \beta[\to [0, +\infty[$, che esprime la distanza tra i due corpi. Per la definizione di norma, abbiamo[10]

$$\frac{1}{2}\rho^2 = \frac{1}{2}\langle z, z\rangle \tag{26}$$

Derivando ambo i membri della (26) e riutilizzando l'equazione del problema di Cauchy (19) otteniamo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho^2\right) = \langle z', z\rangle = \left\langle x' - \frac{z}{\|z\|}\|x'\|\,, z\right\rangle = \langle x', z\rangle - \frac{\|x'\|}{\|z\|}\langle z, z\rangle = \langle x', z\rangle - \|x'\|\,\|z\| \tag{27}$$

Usiamo ora una nota disuguaglianza:

$$-\|u\|\,\|v\| \leq \langle u, v\rangle \leq \|u\|\,\|v\|$$

da cui

$$-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \leq 1$$

[10]tralasciamo nuovamente l'argomento t per semplicità espositiva

quindi $\exists!\,\theta \in [0,\pi]$ tale che $\cos\theta = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}$.

Nel nostro caso $\exists!\,\theta : [0,\beta[\, \to [0,\pi]$ tale che $\cos\theta(t) = \dfrac{\langle x', z\rangle}{\|x'\|\,\|z\|}$. Quindi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho^2\right) = \langle x', z\rangle - \|x'\|\,\|z\| = \|x'\|\,\|z\|\cos\theta(t) - \|x'\|\,\|z\| = -\,\|x'\|\,\|z\|\,(1-\cos\theta(t)) \quad (28)$$

Poniamo ora $\xi := \dfrac{1}{2}\rho^2$, da cui $\rho = \sqrt{2\xi}$.

Riscriviamo la (28) con questa nuova notazione:

$$\xi' = -\sqrt{2\xi}\,\|x'\|\,(1-\cos\theta(t)) \quad (29)$$

Risolviamo ora la (29) con il metodo di separazione delle variabili:

$$\frac{\xi'}{\sqrt{2\xi}} = -\,\|x'\|\,(1-\cos\theta(t))$$

da cui

$$\int_0^t \frac{\xi'(s)}{\sqrt{2\xi(s)}}\,ds = -\int_0^t \|x'(s)\|\,(1-\cos\theta(s))\,ds$$

Il primo membro si integra facilmente. Infatti:

$$\sqrt{2\xi(t)} - \sqrt{2\xi(0)} = -\int_0^t \|x'(s)\|\,(1-\cos\theta(s))\,ds$$

Per definizione di ξ, possiamo riscriverla ulteriormente

$$\rho(t) - \rho(0) = -\int_0^t \|x'(s)\|\,(1-\cos\theta(s))\,ds$$

dai cui otteniamo la seguente legge di conservazione:

$$\rho(t) + \int_0^t \|x'(s)\|\,(1-\cos\theta(s))\,ds = \rho(0) = \|z_0\| \quad (30)$$

Nota 1. Vediamo come questa uguaglianza ci permette di calcolare facilmente il valore della formula (15). Infatti, dando per buono il problema 1 e in riferimento alla figura 2, possiamo supporre $x(t) := A_2(t)$ e $y(t) := A_1(t)$. Pertanto $z(t) = A_2(t) - A_1(t)$ e $\rho(t) = \|A_2(t) - A_1(t)\|$. Inoltre sappiamo che $\rho(t) \to 0$ se $t \to +\infty$, poichè gli insetti si incontrano al centro del quadrato. Di più, $z(t)$ è un lato dell'n-agono mentre $x'(t)$ è diretto nella direzione del lato successivo. Pertanto l'angolo compreso tra $z(t)$ e $x'(t)$, che è l'angolo θ, è costantemente uguale a $\frac{2\pi}{n} = \alpha$. Infine, prima di procedere con i conti, calcoliamo $\|z(0)\| = 2\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2(1-\cos\alpha)}$, per semplici proprietà trigonometriche. Usiamo ora la legge di conservazione:

$$\rho(t) + \int_0^t \|x'(s)\|\,(1-\cos\alpha)\,ds = \rho(0) = \sqrt{2(1-\cos\alpha)} \quad (31)$$

Passando al limite otteniamo

$$\sqrt{2(1-\cos\alpha)} = \lim_{t\to+\infty}\left(\rho(t) + \int_0^t \|x'(s)\|\,(1-\cos\alpha)\,ds\right) = (1-\cos\alpha)\int_0^{+\infty} \|x'(s)\|\,ds$$

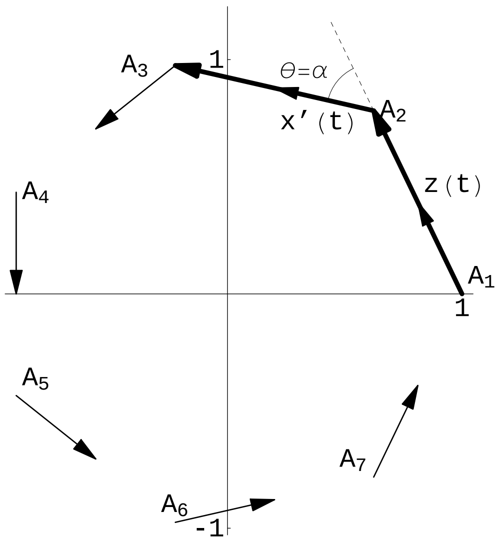


Figura 2:

Da cui

$$\int_0^{+\infty} \|x'(s)\| \, ds = \sqrt{\frac{2}{1-\cos\alpha}}$$

Ma $\int_0^{+\infty} \|x'(s)\| \, ds = \int_0^{+\infty} \|A_2(t)\| \, ds = \lim_{\tau\to\infty} L(\tau)$, che è il valore cercato. Come si vede, i conti son molto più semplici. Tuttavia, casi in cui l'angolo sia noto sono rari[11].

Nota 2. Possiamo immediatamente stabilire che non può mai accadere il caso in cui inseguitore e inseguito hanno orbita periodica non banale, cioè in cui stanno fermi entrambi. Sia infatti T tale che $x(T+a) = x(a) \, \forall a$ e $y(T+a) = y(a) \, \forall a$. Se un tale T esiste, in particolare abbiamo che $z(T+a) = z(a)$. Quindi $\rho(T+a) = \rho(a)$. Ma come vedremo tra poco, ρ è debolmente decrescente. Quindi $\rho(a) \equiv \rho(0)$. Dalla formula di conservazione, abbiamo

$$\int_0^a \|x'(t)\| \, (1-\cos\theta(t) \, dt \equiv 0 \tag{32}$$

Poichè $\|x'(t)\| \geq 0$ e $1-\cos\theta(t) \geq 0$, allora l'equazione (32) vale solo se $\|x'(t)\| \equiv 0$ oppure se $\cos\theta(t) \equiv 0$. Il primo caso si ha quando il corpo inseguito non si muove. Il secondo caso si ha quando i due corpi si muovono lungo la stessa retta, nello stesso verso. In questo caso, le due traiettorie non son periodiche. Dunque non esistono coppie di traiettorie periodiche non banali.

Torniamo al problema generale.

Introduciamo la fuzione ausiliaria $l(t) := \displaystyle\int_0^t \|x'(s)\| \, (1-\cos\theta(s)) \, ds$. Per definizione, $\rho(t) + l(t) = \|z_0\|$. Siccome $\|x'(s)\| \, (1-\cos\theta(s)) \geq 0$, allora $l(t)$ è debolmente crescente. Ma essendo che $\rho(\beta) = 0$ per il Teorema 1, allora possiamo concludere che $\|z_0\| = l(\beta)$. Abbiamo la seguente proposizione:

[11] vedi capitolo 5

Proposizione 1. *1.* $l(t) < \|z_0\| \quad \forall t \geq 0 \Longleftrightarrow \rho(t) > 0 \quad \forall t \geq 0$

2. $\exists \tau > 0 \quad t.\ c. \quad l(\tau) \geq \|z_0\| \Longrightarrow \exists \beta \leq \tau \quad t.\ c. \quad l(\beta) = \|z_0\|\ e \quad l(t) \leq \|z_0\| \quad \forall t \in [0, \beta[$

Dimostrazione. La prima parte è molto semplice:

$$l(t) < \|z_0\| \Longleftrightarrow \|z_0\| - l(t) > 0 \Longleftrightarrow \rho(t) > 0$$

Nella seconda parte, un tale β esiste per il teorema degli zeri di Bolzano applicato alla funzione $\eta(t) := l(t) - \|z_0\|$. Infatti $\eta(t)$ assume valori $\eta(0) = -\|z_0\| < 0$ e, per ipotesi, $\eta(\tau) = l(\tau) - \|z_0\| \geq 0$ agli estremi dell'intervallo $[0, \tau]$ ed è ivi continua. Quindi esiste uno zero nell'intervallo $[0, \tau]$. Sia β tale zero: $\eta(\beta) = 0$. Per definizione di η, un tale β soddisfa $l(\beta) = \|z_0\|$. Infine, poichè $l(t)$ è debolmente crescente, si ha $\forall t \in [0, \beta[\quad l(t) \leq \|z_0\|$

□

Abbiamo quindi delle condizioni sufficienti sulle collisioni:

Condizione sufficiente per la non collisione

$$\int_0^{+\infty} \|x'(s)\| \left(1 - \cos\theta(s)\right)\, ds < \|z_0\| \Longrightarrow \text{Non collisione} \tag{33}$$

Condizione sufficiente per la collisione

$$\int_0^{+\infty} \|x'(s)\| \left(1 - \cos\theta(s)\right)\, ds > \|z_0\| \Longrightarrow \text{Collisione}$$

Nel primo caso, abbiamo anche una distanza limite:

$$\lim_{t\to+\infty} \|z(t)\| = \lim_{t\to+\infty} \rho(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(\|z_0\| - l(t)\right) = \|z_0\| - \int_0^{+\infty} \|x'(s)\| \left(1 - \cos\theta(s)\right)\, ds > 0$$

Tuttavia il risultato ottenuto non è molto soddisfacente: dipende, infatti, da $\theta(t)$, che dipende da $z(t)$. Tuttavia, sarebbe preferibile che la condizione di non collisione fosse indipendente dalla soluzione e quindi da $\theta(t)$. In quest'ottica, abbiamo il seguente corollario:

Corollario 1 (Condizione sufficiente di non collisione rafforzata). *Se* $\int_0^{+\infty} \|x'(t)\|\, dt < \frac{\|z_0\|}{2}$ *allora non c'è mai collisione*

Dimostrazione.

$$\int_0^t \|x'(s)\| \left(1 - \cos\theta(s)\right)\, ds \leq 2 \int_0^t \|x'(s)\|\, ds \leq 2 \int_0^{+\infty} \|x'(s)\|\, ds < \|z_0\|$$

Ma se vale $\displaystyle\int_0^t \|x'(s)\| \left(1 - \cos\theta(s)\right)\, ds < \|z_0\|$ per ogni t, allora vale anche per il passaggio al limite. Cioè

$$\int_0^{+\infty} \|x'(s)\| \left(1 - \cos\theta(s)\right)\, ds < \|z_0\|$$

e quindi si applica la (33).

□

3.2 L'equazione inseguitrice normalizzata

In questa breve sezione vediamo che, sotto particolari condizioni, è possibile normalizzare l'equazione (19). In questo modo, possiamo limitarci a studiare i moti che hanno velocità costantemente uguale a 1 in modulo.
Manteniamo tutte le convenzioni e le funzioni definite nel paragrafo precedente. Consideriamo il caso in cui

$$0 < \nu \leq \|x'(t)\| \leq \mu < +\infty$$

In questo caso la velocità della particella inseguita è limitata e mai nulla. Siano $t = \phi(s)$ e $s = \psi(t)$. Sia inoltre ω tale che $z(\phi(s)) = \omega(s)$ e $\omega(\psi(t)) = z(t)$. Con queste nuove notazioni possiamo scrivere:

$$\frac{d}{dt}\left(\omega(\psi(t))\right) = \omega'(\psi(t))\psi'(t)$$

D'altra parte

$$\frac{d}{dt}\left(\omega(\psi(t))\right) = \frac{d}{dt}\left(z(t)\right) = x'(t) - \frac{z(t)}{\|z(t)\|}\|x'(t)\| = x'(t) - \frac{\omega(\psi(t))}{\|\omega(\psi(t))\|}\|x'(t)\|$$

Pertanto, egualiando le due espressioni e dividendo per $\|x'(t)\| \neq 0$:

$$\frac{\omega'(\psi(t))\psi'(t)}{\|x'(t)\|} = \frac{x'(t)}{\|x'(t)\|} - \frac{\omega(\psi(t))}{\|\omega(\psi(t))\|} \tag{34}$$

Ora prendiamo $\psi'(t) = \|x'(t)\|$, da cui $\psi(t) = \displaystyle\int_0^t \|x'(\sigma)\|\, d\sigma$. Vediamo brevemente che una tale definizione per la $\psi(t)$ è accettabile. Infatti deve essere possibile trovare ϕ tale che $\phi(s) = t$, dove $s = \psi(t)$. É sufficiente vedere che la ψ è invertibile e quindi porre $\phi(s) := \psi^{-1}(s)$. Ma la ψ è invertibile poiché $\psi'(t) = \|x'(t)\| \neq 0$. Di più, la $\psi : [0, +\infty[\ \to [0, +\infty[$ è un diffeomorfismo poiché è di classe $\mathcal{C}^1$. Quindi rielaborando la (34) e ponendo $v(s) := \frac{x'(s)}{\|x'(s)\|}$ otteniamo:

$$\omega'(s) = v(s) - \frac{\omega(s)}{\|\omega(s)\|} \tag{35}$$

Siccome $\|v'(s)\| = 1 \quad \forall t \in [0, +\infty[$, allora la (35) è effettivamente la forma normalizzata della (19).

Questo tipo di equazione inseguitrice è stato studiato a lungo da Pierre Bouguer nel 1732 [11].

Nel prossimo capitolo studieremo la soluzione dei problemi 3 e 4, utilizzando alcuni dei risultati ottenuti in questo capitolo.

4 Esempi e analisi di soluzioni di problemi d'inseguimento

Vediamo ora la soluzione di alcuni problemi di inseguimenti sul piano. Il primo problema ci permetterà di dare un significato più intuitivo alla formula (30)

4.1 Soluzione sorprendente: il problema delle due navi

Risolviamo il problema 3 di cui riassumo brevemente il testo:

Problema 5. *Una nave Q si muove di moto rettilineo non uniforme. Una nave P la insegue con la stessa velocità, a partire da quando la vede passare esattamente di fronte. Trovare la distanza limite tra le due navi.*

L'inseguimento avviene nel seguente modo:

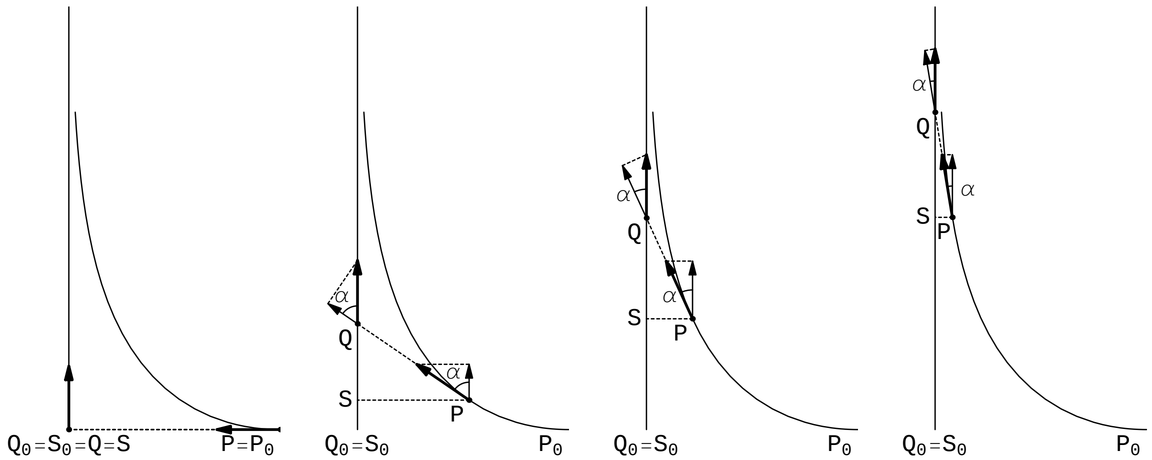


Figura 3: L'inseguimento tra le navi

Vediamo innanzitutto la soluzione proposta da H. Steinhaus [3]:

Soluzione [di Steinhaus]. *Indichiamo con α l'angolo che la direzione PQ forma istante per istante con la scia della nave Q e con v la velocità delle navi P e Q nello stesso istante. L'avvicinamento delle navi dipende dalla velocità della nave P diretta verso Q e dalla componente $v\cos\alpha$ della velocità della nave Q, lungo la direzione PQ; pertanto la distanza fra le navi diminuisce con velocità $v(1-\cos\alpha)$. La proiezione S del punto P sulla scia della nave Q si sposta lungo questa scia con velocità $v\cos\alpha$ e la nave Q scappa con velocità v, quindi la distanza SQ cresce con velocità $v(1-\cos\alpha)$. Dato che, come abbiamo già notato, la distanza PQ decresce e la distanza SQ cresce con la stessa velocità, la somma $PQ+SQ$ è costante e risulta uguale a 10 miglia marine come nel momento iniziale. Dopo molto tempo P si avvicinerà alquanto a S e avremo, per tempi molto grandi, $2PQ = PQ+SQ = 10$ miglia, da cui $PQ = 5$ miglia* □

La soluzione è molto elegante e non richiede nessun tipo di calcolo. Vediamo quindi di interpretare i risultati del capitolo precedente secondo in questo problema.

Soluzione. Possiamo assumere che la velocità delle due navi non sia mai nulla. È inoltre limitata per la natura fisica del problema. Si può riparametrizzare l'equazione come abbiamo visto nel paragrafo 3.2 Riscriviamo i dati secondo le notazioni già usate:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad z(t) = \begin{pmatrix} -y_1(t) \\ t - y_2(t) \end{pmatrix}$$
$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_0 = z(0) = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il problema di Cauchy relativo al problema in esame è il seguente, scritto componente per componente, sviluppando le norme e facendo le dovute semplificazioni algebriche:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -\dfrac{y_1(t)}{\sqrt{y_1^2(t) + (t - y_2(t))^2}} \\ y_2'(t) = -\dfrac{y_2(t) - t}{\sqrt{y_1^2(t) + (t - y_2(t))^2}} \\ y_1(0) = 10 \\ y_2(0) = 0 \end{cases} \tag{36}$$

Si tratta di un sistema di equazioni differenziali accoppiate che però non vogliamo risolvere in questo momento in quanto risolvere tale sistema equivale a trovare la traiettoria della nave inseguitrice. Cosa che non è richiesta dal problema. A noi interessa la distanza limite. Introduciamo quindi la funzione ausiliaria $\rho(t) = \|z(t)\| = \sqrt{y_1^2(t) + (t - y_2(t))^2}$ e poniamo $\sigma(t) := \cos\theta(t)$. Ci interessa il $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(t)$. Per la legge di conservazione (30), abbiamo:

$$\rho(t) = \|z_0\| - \int_0^t \|x'(s)\| \, (1 - \cos\theta(s)) \, d\sigma = 10 - \int_0^t (1 - \sigma(s)) \, ds$$

Da cui otteniamo, derivando ad ambo i membri:

$$\rho'(t) = \sigma(t) - 1 \tag{37}$$

Useremo la seguente formula:

$$\frac{d}{dt} \frac{w(t)}{\|w(t)\|} = \frac{w'(t)}{\|w(t)\|} - \left\langle \frac{w'(t)}{\|w(t)\|}, \frac{w(t)}{\|w(t)\|} \right\rangle \frac{w(t)}{\|w(t)\|} \tag{38}$$

Calcoliamo $\sigma'(t)$ usando la (38) e la (19):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\sigma) &= \frac{d}{dt} \left\langle \frac{x'}{\|x'\|}, \frac{z}{\|z\|} \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \frac{x'}{\|x'\|}, \frac{z}{\|z\|} \right\rangle + \left\langle \frac{x'}{\|x'\|}, \frac{d}{dt} \frac{z}{\|z\|} \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{x'}{\|x'\|}, \frac{z'}{\|z'\|} - \left\langle \frac{z'}{\|z\|}, \frac{z}{\|z\|} \right\rangle \frac{z}{\|z\|} \right\rangle = \left\langle \frac{x'}{\|x'\|}, \frac{z'}{\|z'\|} \right\rangle - \left\langle \frac{z'}{\|z\|}, \frac{z}{\|z\|} \right\rangle \left\langle \frac{x'}{\|x\|}, \frac{z}{\|z\|} \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{x'}{\|x'\|}, \frac{x' - \frac{z}{\|z\|} \|x'\|}{\|z'\|} \right\rangle - \left\langle \frac{x' - \frac{z}{\|z\|} \|x'\|}{\|z\|}, \frac{z}{\|z\|} \right\rangle \sigma = \cdots = \frac{1}{\|z\|}(1 - \sigma^2) = \frac{1}{\rho}(1 - \sigma) \end{aligned}$$

Combinando la (37) con la formula appena ottenuta abbiamo

$$\begin{cases} \rho' = \sigma - 1 \\ \sigma' = \dfrac{1}{\rho}(1 - \sigma^2) \end{cases} \tag{39}$$

Da questo sistema si può giungere a una soluzione alternativa a quella proposta per il problema 4.

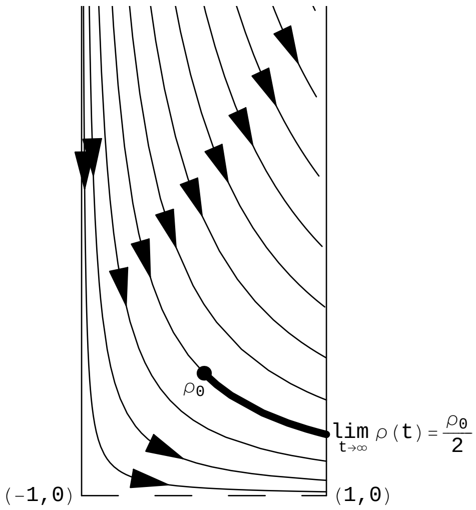


Figura 4: Le curve di fase del sistema (39)

Nel sistema (39), dividiamo per $1+\sigma$ la prima equazione e per ρ la seconda.

$$\begin{cases} \dfrac{\rho'}{\rho} = -\dfrac{1}{\rho}(1-\sigma) \\ \dfrac{\sigma'}{1+\sigma} = \dfrac{1}{\rho}(1-\sigma) \end{cases}$$

Da cui $\dfrac{\sigma'}{1+\sigma} + \dfrac{\rho'}{\rho} = 0$. Integrando abbiamo $\ln(1+\sigma) + \ln\rho = ln(1+\sigma(0)) + \ln\rho(0)$. Le condizioni iniziali che consideriamo sono $\rho(0) = \rho_0$ e $\sigma(0) = \cos\theta(0) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$. Allora $\ln(1+\sigma) + \ln\rho = \ln((1+\sigma)\rho) \equiv \ln\rho_0$, ossia $\rho + \rho\sigma \equiv \rho_0$, e quindi $\sigma = \dfrac{\rho_0}{\rho} - 1$. Noi cerchiamo la soluzione limite, in cui $\rho' = 0$. Sostituendo nella prima equazione del sistema (39) e passando al limite si ottiene $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(t) = \dfrac{\rho_0}{2}$, che è la soluzione cercata.

$\square$

4.2 Soluzione esatta: il caso della lepre e del cane

Come già osservato, in questo problema dobbiamo trovare la traiettoria del cane che insegue la lepre. Sappiamo già che la lepre si muove di moto rettilineo uniforme. Pertanto non serve riparametrizzare le velocità. Dinamicamente, l'inseguimento avviene come nella figura (3).

Soluzione [del problema 4]. Per praticità cambiamo le notazioni rispetto al problema precedente. Siano $L(t) = (0,t)$ la traiettoria della lepre e $C(t) = (x(t), y(t))$ la traiettoria del cane. Inoltre $C(0) = (x(0), y(0)) = (1,0)$. Indicherò con $\dot{x}(t)$ e $\dot{y}(t)$ le derivate temporali e ometterò l'argomento t. A questo punto abbiamo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= 1 \\ \dot{x} &= -\frac{x}{\sqrt{x^2+(t-y)^2}} \\ \dot{y} &= \frac{t-y}{\sqrt{x^2+(t-y)^2}} \end{aligned} \tag{40}$$

Quindi:

$$-\frac{x\dot{x}}{\sqrt{x^2+(t-y)^2}} + \frac{(t-y)\dot{y}}{\sqrt{x^2+(t-y)^2}} = 1$$

Da cui, elevando al quadrato ambo i membri e risistemando:

$$((t-y)\dot{y} - x\dot{x})^2 = x^2 + (t-y)^2 \tag{41}$$

Espandendo i quadrati e raccogliendo:

$$\begin{aligned} (t-y)^2\dot{y}^2 + x^2\dot{x}^2 - 2(t-y)x\dot{y}\dot{x} &= x^2 + (t-y)^2 \\ (t-y)^2(\dot{y}^2-1) + x^2(\dot{x}^2-1) - 2(t-y)x\dot{y}\dot{x} &= 0 \end{aligned}$$

Quindi, usando la relazione (40):

$$0 = (t-y)^2\dot{x}^2 + x^2\dot{y}^2 - 2(t-y)x\dot{y}\dot{x} = ((t-y)\dot{x} + x\dot{y})^2$$

Da cui:

$$(t-y)\dot{x} + x\dot{y} = 0$$

Notiamo che, per come è impostato il problema, è possibile esplicitare la y come funzione dipendente da x, poiché la componente del moto lungo l'asse delle ascisse è strettamente decrescente. Quindi avrò $y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Otteniamo:

$$t - y + xy' = 0 \tag{42}$$

Inoltre abbiamo:

$$t = \int_0^t 1\, ds = \int_0^t \left(\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s)\right) ds = \int_0^t \left\|1 - y'^2(x(s))\right\| ds = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\, ds \tag{43}$$

Sostituendo t nella (42), abbiamo una equazione differenziale del primo ordine, a una incognita non lineare e non omogenea, che possiamo differenziare rispetto a x per ottenerne una del secondo ordine. Assieme alle condizioni iniziali $y(x(0))) = y(1) = 0$ e $y'(x(0)) = \frac{\dot{y(0)}}{\dot{x(0)}} = 0$ otteniamo quindi il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} xy'' - \sqrt{1+y'^2} = 0 \\ y(x(0)) = y(1) = 0 \\ y'(1) = \dfrac{\dot{y}(0)}{\dot{x}(0)} = 0 \end{cases}$$

L'equazione differenziale si risolve ponendo $\xi := y'$ e quindi separando le variabili:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\, d\xi = \int \frac{1}{x}\, dx$$
$$\ln(\xi + \sqrt{1+\xi^2}) = \ln(c_1 x)$$
$$\xi = \frac{1}{2c_1 x} - \frac{c_1 x}{2}$$

Quindi

$$y = \int \xi\, dx = \int \frac{1}{2c_1 x}\, dx - \int \frac{c_1 x}{2}\, dx = \frac{1}{2c_1} \ln x - \frac{c_1}{4} x^2 + c_2$$

Con le condizioni iniziali si ottiene $c_1 = -1$ e $c_2 = \frac{1}{4}$. La soluzione del problema di Cauchy è quindi la seguente:

$$y(x) = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4}$$

□

Nota 3. Questa equazione è stata studiata da Arthur Bernhart. Si trovano molti riferimenti a riguardo, cercando *pursuit curve* tramite *MathSciNet* o un qualsiasi motore di ricerca

5 Congetture e futuri possibili sviluppi

L'argomento affrontato in questa tesi è in realtà molto vasto. Cercando con *MathSciNet* le parole *pursuit* e *evasion*, risultano più di 1100 articoli. Data la vastità dei possibili problemi studiati, spesso si trovano solamente studi su particolari condizioni di inseguimento. I metodi che si usano arrivano dalla teoria del controllo, dalla teoria dei giochi, dalla robotica [12], dalla balistica [13]. Tra tutte queste possibilità, ho selezionato alcuni ambiti che è mio interesse studiare più approfonditamente e che potrebbero portare alla formulazione e risoluzione di problemi nuovi:

Inseguimenti asimmetrici: C'è la possibilità di generalizzare ulteriormente il problema degli n insetti. Si possono considerare posizioni iniziali non simmetriche sia sul piano [2] che in $\mathbb{R}^h$, mantenendo sempre la stessa regola per le velocità.

Giochi d'inseguimento discreti e continui: Lasciare a inseguitore e inseguito uno o più parametri liberi, come ad esempio la direzione oppure la velocità, sia in modo discreto che in modo continuo. La domanda a cui si vuole rispondere è se esiste una strategia che permetta all'inseguito di fuggire senza essere raggiunto oppure all'inseguitore di raggiungere l'inseguito. Si può anche rinchiudere i due giocatori in una arena: un sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}^n$. Si possono anche aumentare il numero di inseguitori, per rendere il problema più interessante. Questo è l'aspetto più studiato tra i vari problemi di inseguimento. Infatti la determinazione di una strategia ottimale ha molte applicazioni pratiche. Mi limiterò a enunciare solo alcuni tra i numerosi riferimenti: Satimov e Kuchkarov [15] hanno dimostrato che se l'inseguimento di un fuggitivo avviene su $\mathcal{S}^n$ da parte di $h > n$ inseguitori, allora questi possono sempre raggiungere l'inseguito. In caso contrario, esiste una strategia che permette all'inseguito di non essere mai raggiunto; Kovshov [14] si occupa di inseguimenti differenziali permettendo agli inseguitori di decidere in collaborazione le scelte iniziali, e poi proseguire indipendentemente. L'autore dimostra che questa strategia garantisce la cattura in tempo finito; Neufeld [16] studia problemi discreti. In particolare studia il caso in cui inseguitore e inseguito siano vincolati a una griglia $n \times m$. Possono quindi muoversi, con continuità lungo i lati che compongono la griglia.

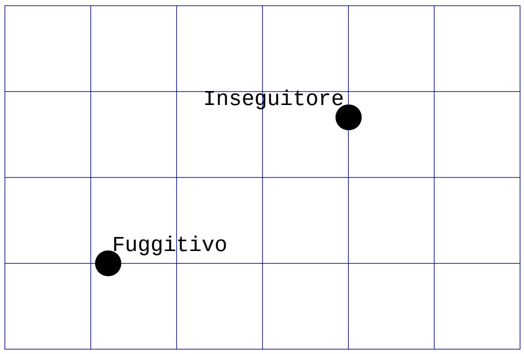


Figura 5: L'inseguimento su una griglia discreta

Inseguimenti su varietà immerse: L'inseguimento ha le stesse modalità di quello studiato in questa tesi, ma avviene su varietà immerse in $\mathbb{R}^n$ che abbiano proprietà non troppo restrittive. Il moto dell'inseguitore avviene lungo le geodetiche che congiungono i due corpi. In certi casi, c'è la possibilità di avere delle scelte discrete.

Inversione: Dato il moto dell'inseguitore, determinare il moto dell'inseguito. Dare condizioni sull'esistenza di un tale inseguitore. Studiare in particolare la situazione in cui l'inseguitore ha una traiettoria periodica. É possibile questa situazione? Come abbiamo già visto, non possono essere entrambe periodiche.

Dipendenza continua dalle condizioni iniziali: Studiare la dipendenza continua delle soluzioni rispetto alle condizioni iniziali. Un simile studio permetterebbe, ad esempio, di stabilire se esistono condizioni iniziali per le quali le soluzioni non sono globalmente definite. Ad esempio:

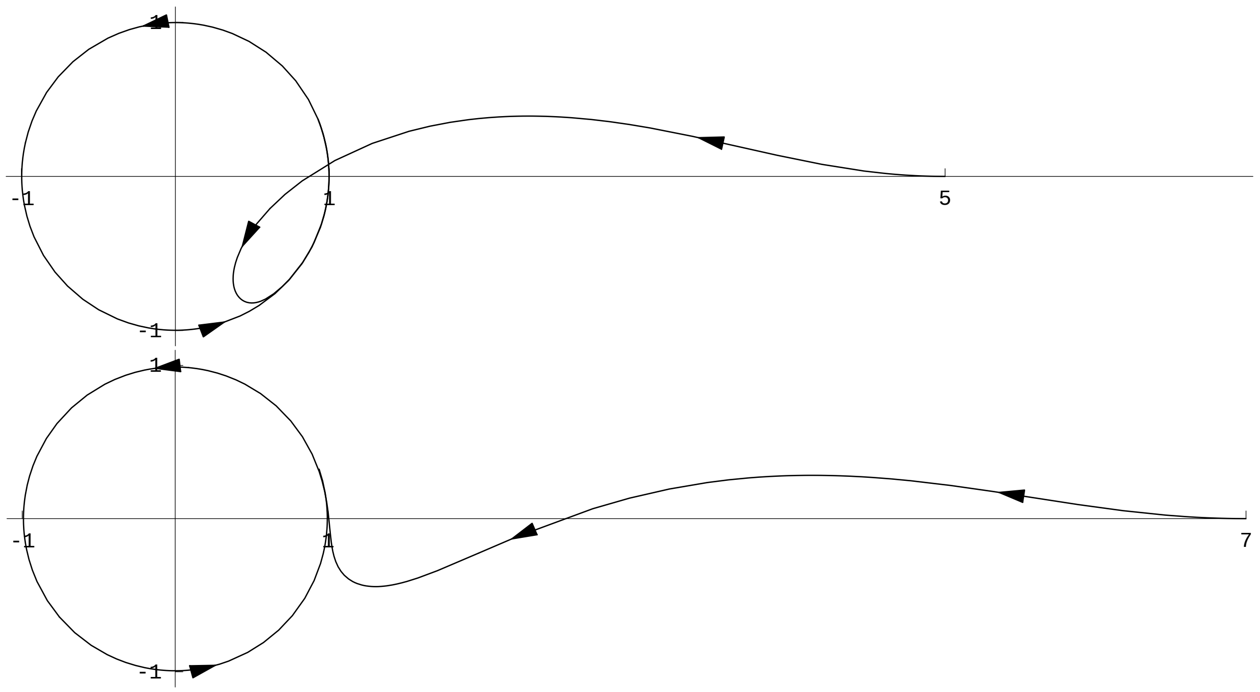


Figura 6: Possibile collisione

Dall'immagine si può pensare che esista un punto di coordinate $(0, l)$, con $5 < l < 7$ tale che la soluzione al problema di Cauchy non sia globalmente definita nel futuro. Non è evidente stabilire se ci sia una dipendenza continua tra il dato iniziale e il momento in cui l'inseguitrice incrocia l'inseguita.

Riferimenti bibliografici

[1] Gardner, M.: *Enigmi e giochi matematici*, Biblioteca Universale Rizzoli, (2001) p.96,105

[2] Klamin, M.S.; Newman, D.J. *Cyclic pursuit or "the three bugs problem"*, The American Mathematical Monthly, Vol.78, No. 6, 631-639

[3] Steinhaus, H.: *Cento problemi di matematica elementare*, Superuniversale Boringhieri, (1987) p.88,205

[4] Guha, A.: *On Leonardo da Vinci's cat and mouse problem*, Bull. of Inst. Math., vol 30, (1994), p.12–15

[5] Barton, J.C.; Eliezer, C.J.: *On pursuit curves*, J. Austral. Math. Soc., B 41 (2000) p. 358–371

[6] Simmons, G.F.: *Differential equations with applications and historical notes*, McGraw-Hill, (1991) p.67–71

[7] Tenenbaum, M.; Pollard, H.: *Ordinary differential equations*, Dover publications, (1963) p.168–183,523–527

[8] Hadeler, K.P.; de Mottoni, P.; Schumacher, K.: *Dynamic models for animal orientation*, J. Math. Biol. 10(1980), no.4, p.307–332

[9] Hale, J.K.: *Ordinary differential equations*, Robert E. Kreiger Publishing company, (1980), p.18–19

[10] Weisstein, E.W.: *Pursuit Curve*, http://mathworld.wolfram.com/PursuitCurve.html

[11] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Curves/Pursuit.html

[12] Richardson, T.J.: *Stable polygons of cyclic pursuit. Ant robotics*, Ann. Math. Artif. Intell., 31, (2001), No. 1,4, 127–146

[13] Rosenberg, R.M.: *a pursuit problem*, J. Franklin Inst., 262 (1956), 265–279

[14] Kovshov, A.M.: *The simple pursuit by a few objects on the multidimensional sphere*, Nova J. Math. Game Theory Algebra 5 (1996), no. 3, 299–308

[15] Satimov, N.Y.; Kuchkarov, A. S.: *On the solution of a model differential pursuit-evasion game on a sphere*, Uzbek. Mat. Zh. No. 1, (2000), 45–50.

[16] Neufeld, S.W.: *A pursuit-evasion problem on a grid*, Inform. Process. Lett. 58 (1996), no. 1, 5–9.