Cap. 1

Il problema di Martin Gardner

Le coccinelle innamorate

Le coccinelle innamorate

Quattro coccinelle (A,B,C,D) occupano gli angoli di un quadrato di venti centimetri di lato. A e C sono maschi, B e D sono femmine. Contemporaneamente A cammina direttamente verso B, B verso C, C verso D e D verso A. Camminando tutte alla stessa velocità costante le quattro coccinelle descrivono quattro spirali logaritmiche congruenti che si incontrano al centro del quadrato.

Le coccinelle innamorate

Quattro coccinelle (A,B,C,D) occupano gli angoli di un quadrato di venti centimetri di lato. A e C sono maschi, B e D sono femmine. Contemporaneamente A cammina direttamente verso B, B verso C, C verso D e D verso A. Camminando tutte alla stessa velocità costante le quattro coccinelle descrivono quattro spirali logaritmiche congruenti che si incontrano al centro del quadrato.
Quanto deve camminare ogni coccinella prima dell'incontro con le altre?

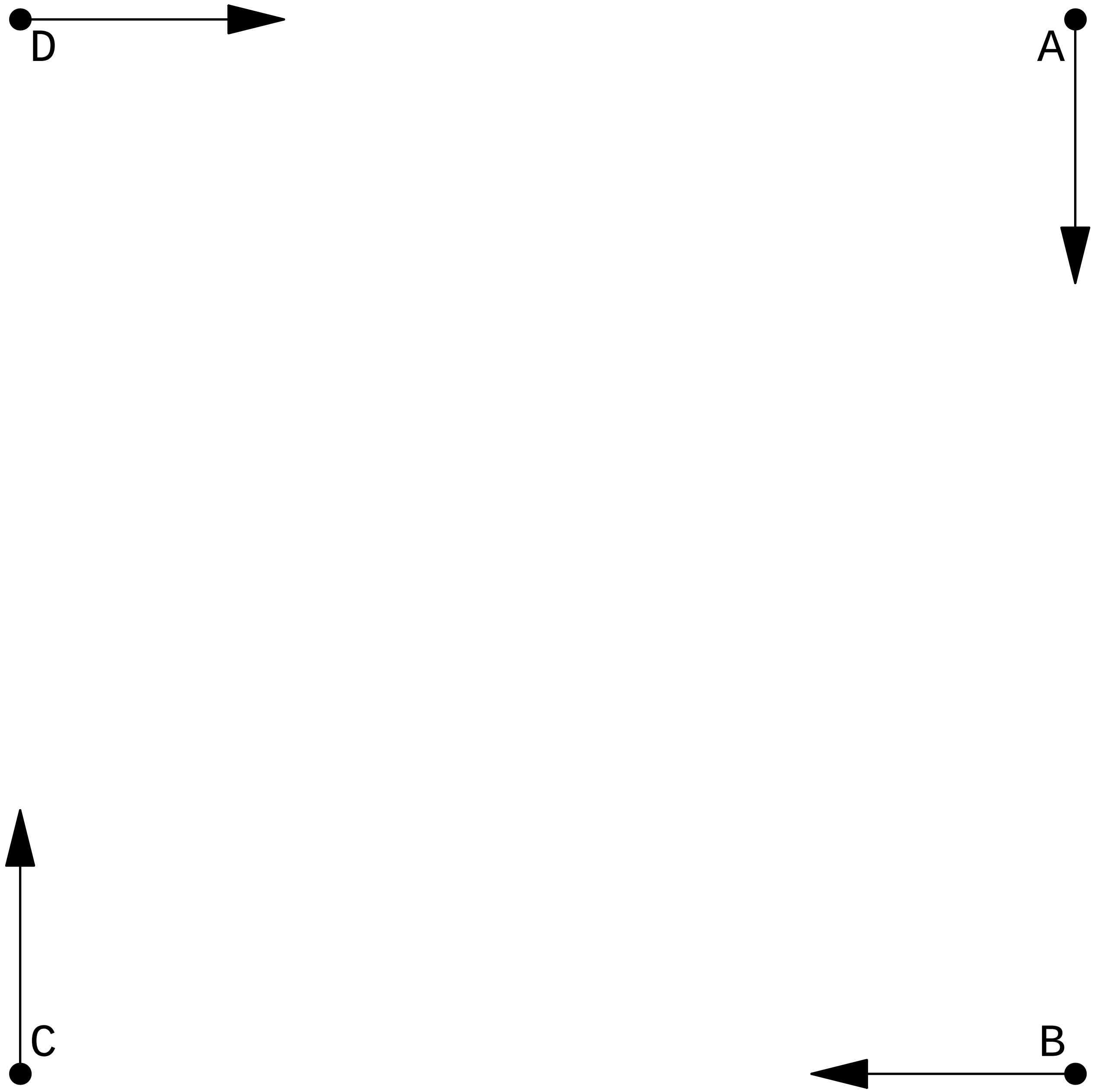
Le coccinelle innamorate

Quattro coccinelle (A,B,C,D) occupano gli angoli di un quadrato di venti centimetri di lato. A e C sono maschi, B e D sono femmine. Contemporaneamente A cammina direttamente verso B, B verso C, C verso D e D verso A. Camminando tutte alla stessa velocità costante le quattro coccinelle descrivono quattro spirali logaritmiche congruenti che si incontrano al centro del quadrato.

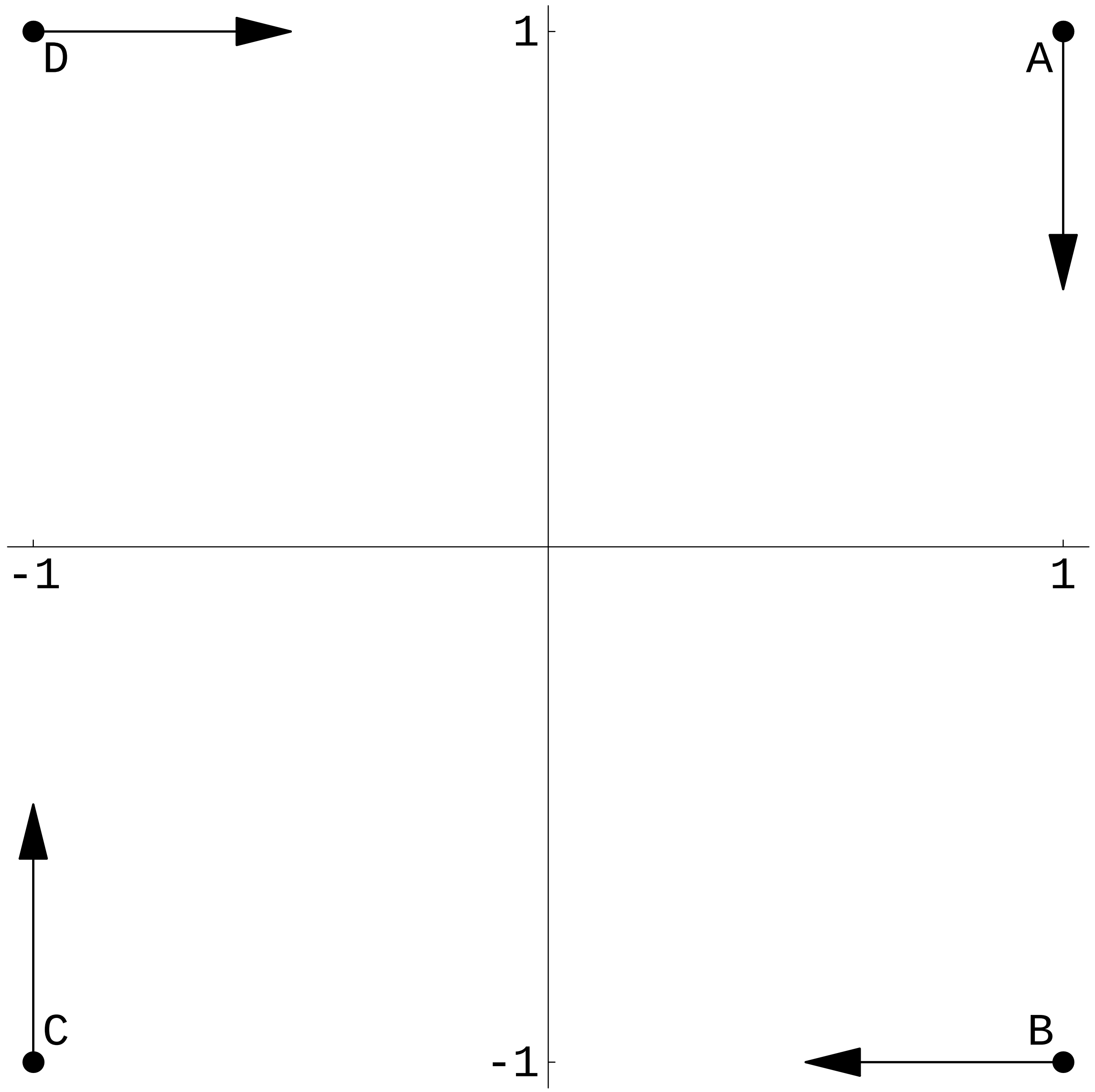
Quanto deve camminare ogni coccinella prima dell'incontro con le altre?

Il problema può essere risolto senza calcoli.

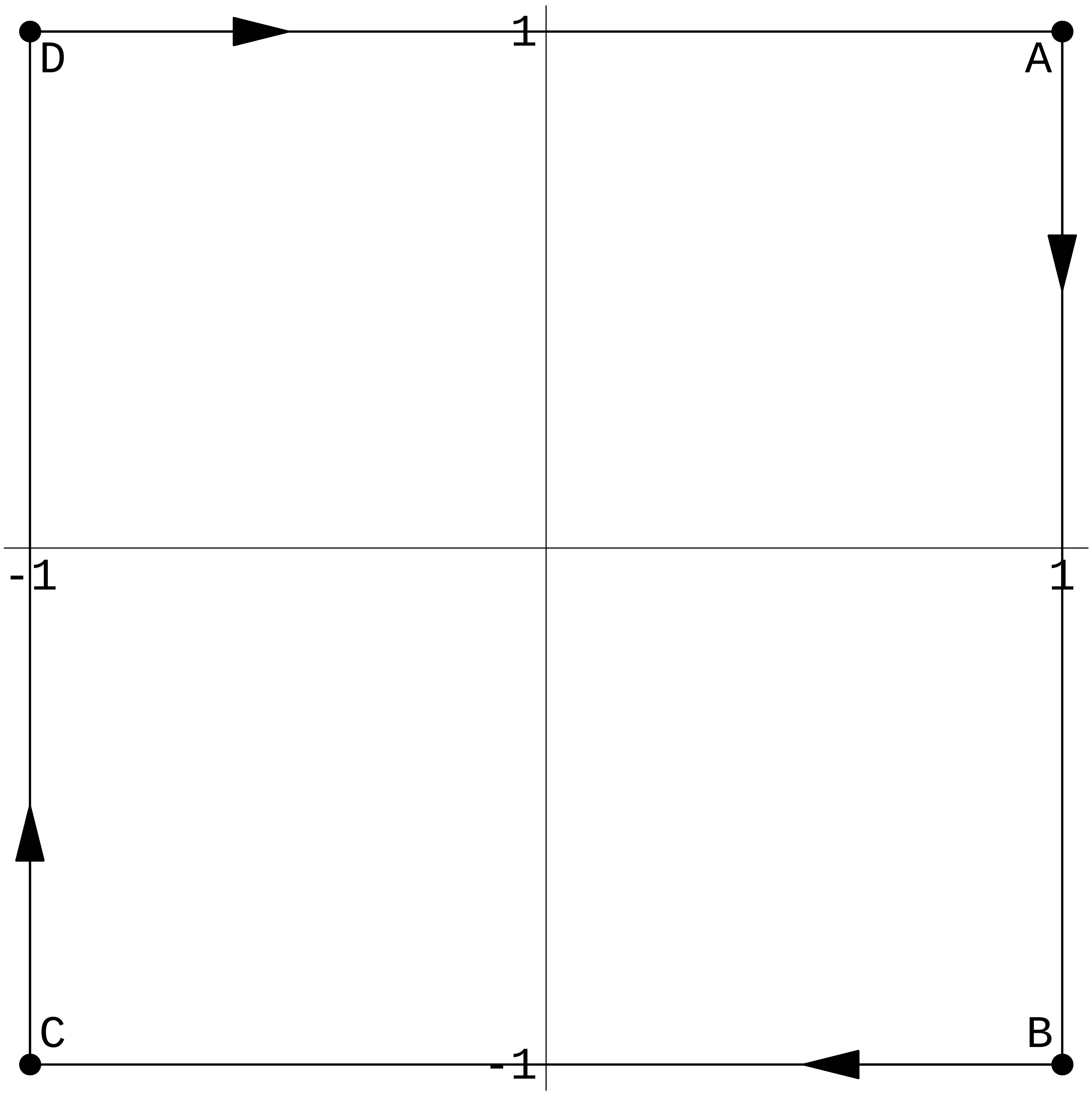
Le coccinelle innamorate

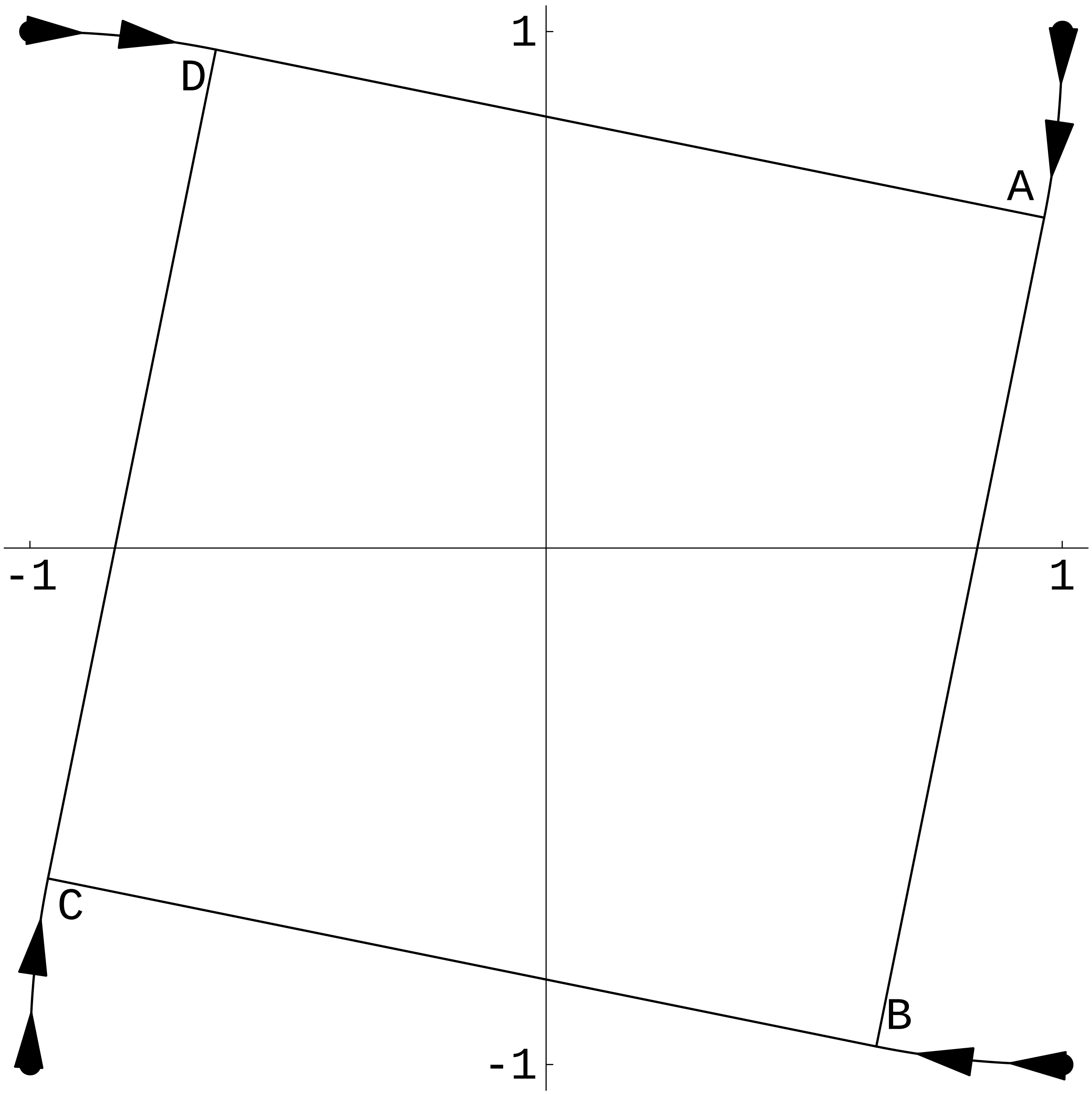


Le coccinelle innamorate

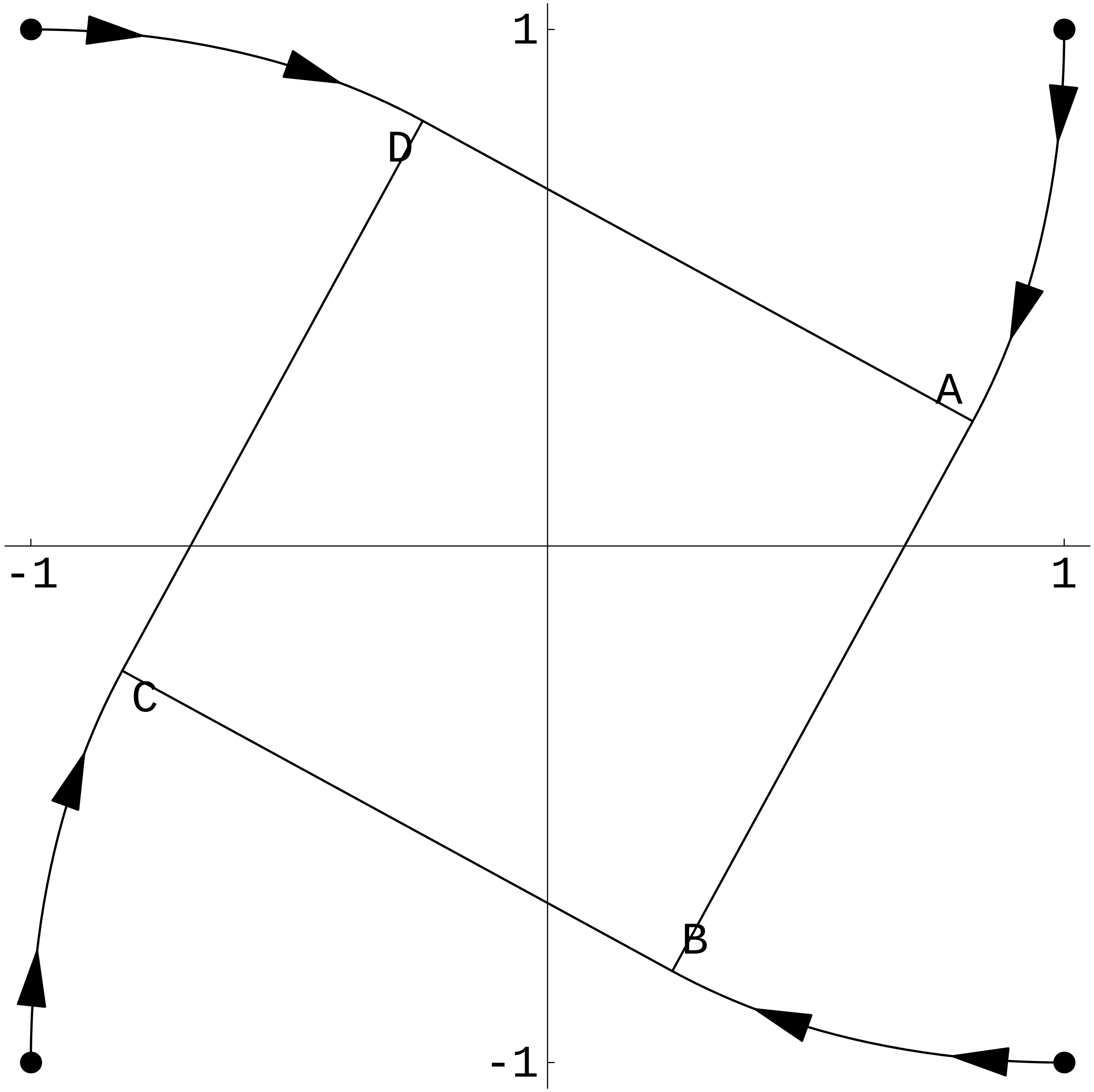


Le coccinelle innamorate

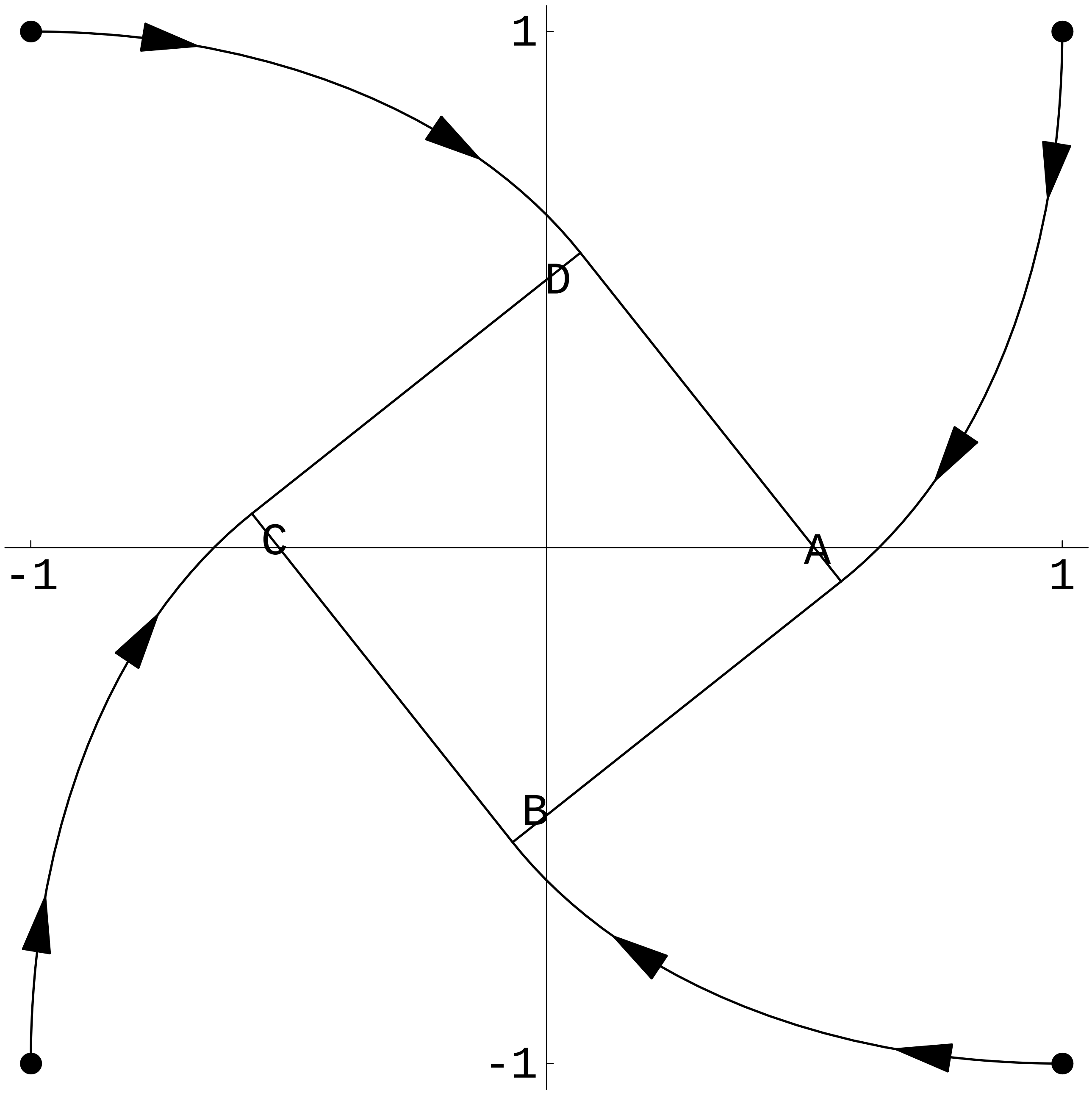


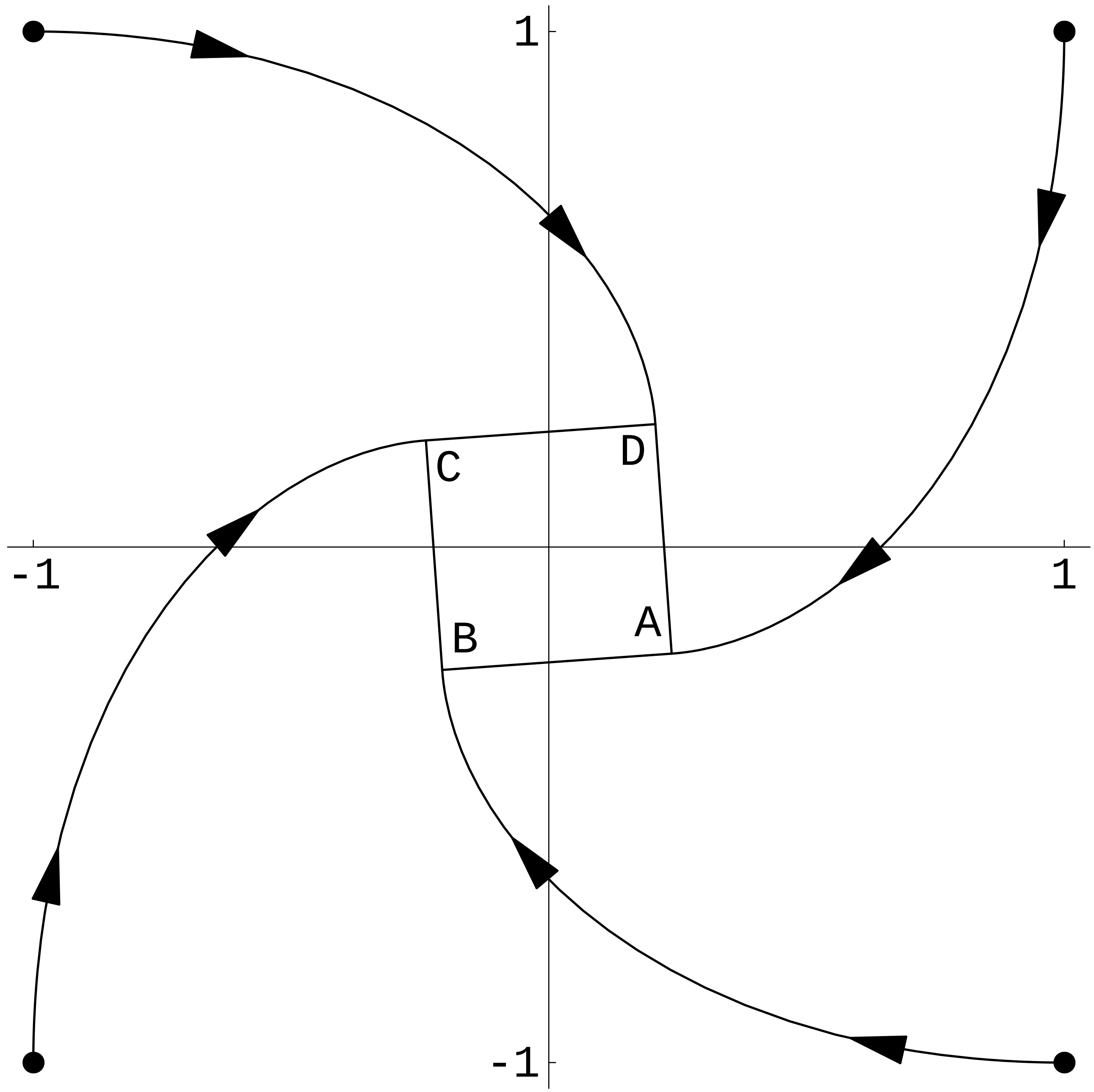

1
D
A
-1
1
C
B
-1

Le coccinelle innamorate



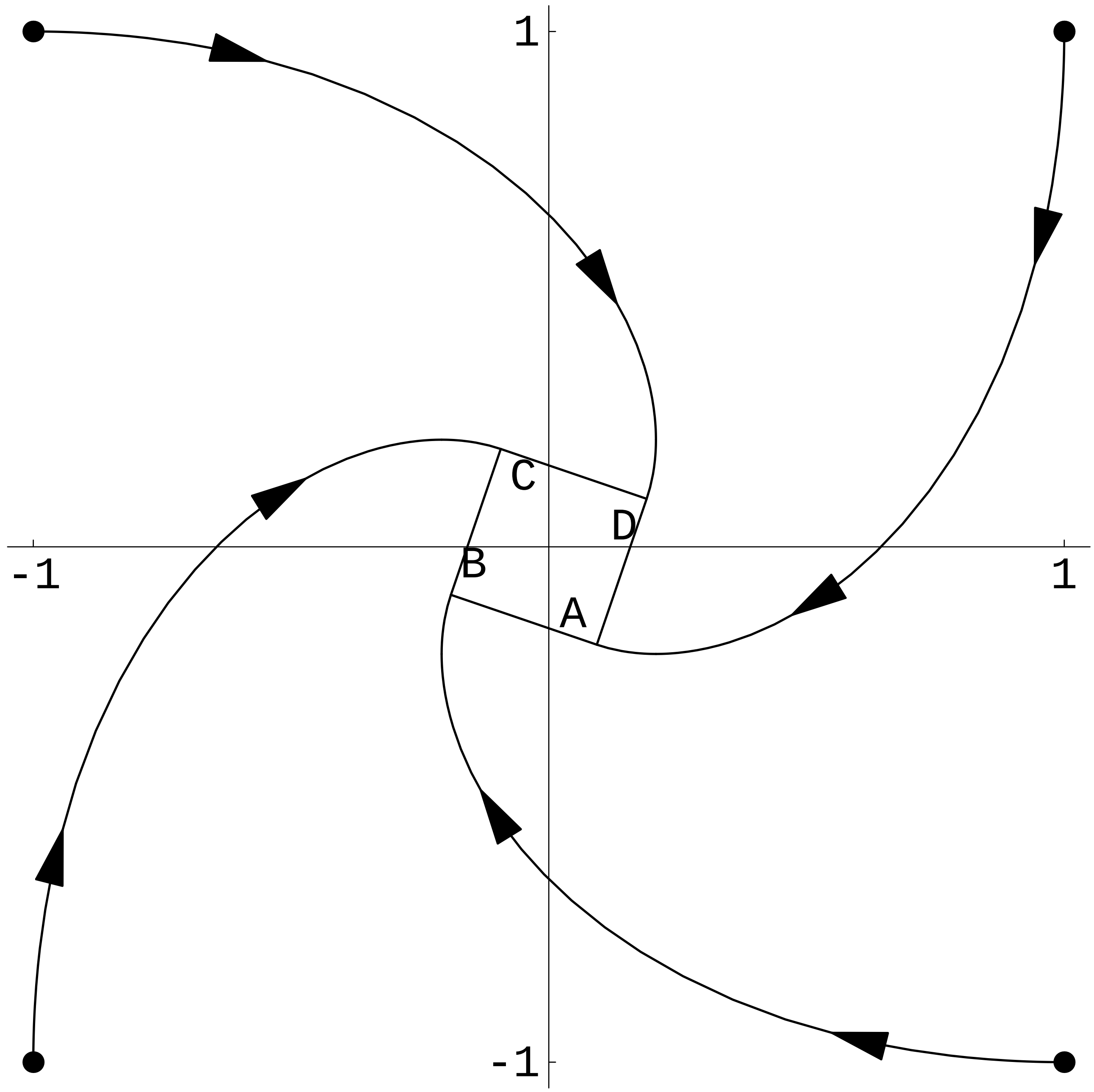
Le coccinelle innamorate



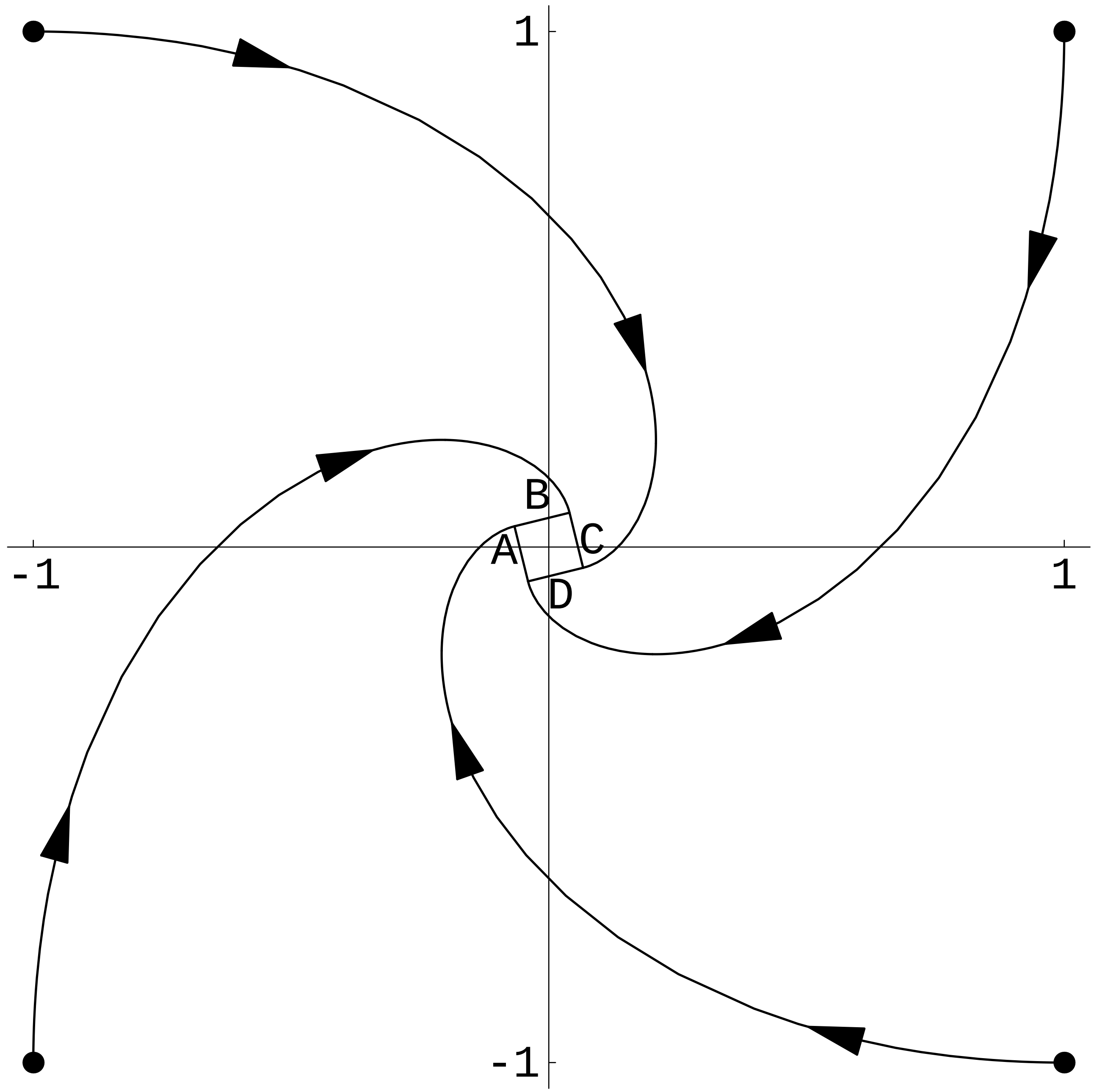


1
-1
1
-1
A
B
C
D

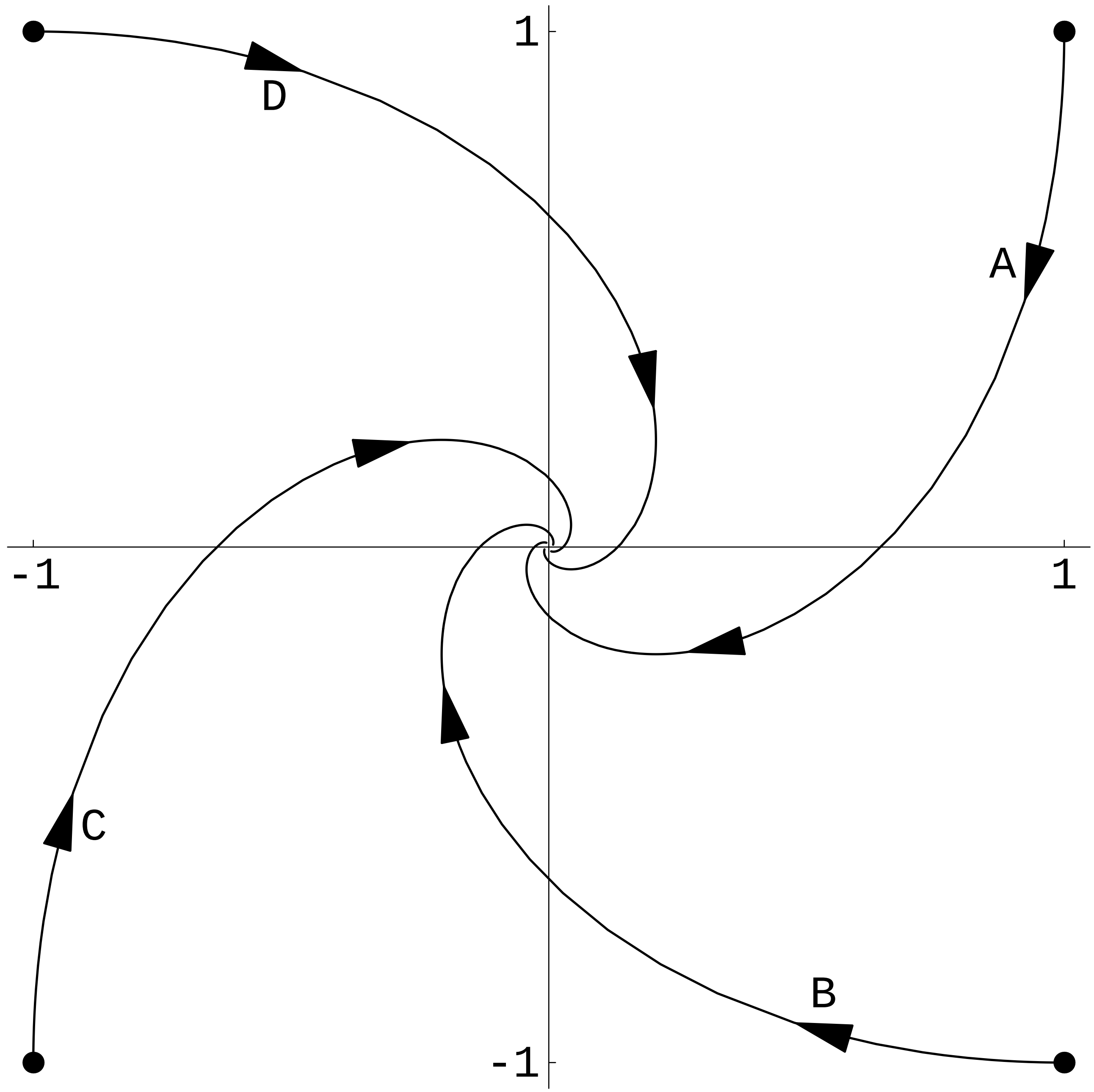
Le coccinelle innamorate



Le coccinelle innamorate



Le coccinelle innamorate



Gardner non chiede di trovare la traiettoria delle coccinelle, ma solo la distanza percorsa dalle coccinelle prima di incontrarsi. In questo caso il problema è sorprendentemente semplice.

Gardner non chiede di trovare la traiettoria delle coccinelle, ma solo la distanza percorsa dalle coccinelle prima di incontrarsi. In questo caso il problema è sorprendentemente semplice.
Per simmetria, in ogni istante le 4 coccinelle si trovano ai vertici di un quadrato il cui lato si va restringendo. Il percorso di una coccinella inseguitrice sarà sempre perpendicolare a quello della coccinella inseguita. Ma allora mentre A si avvicina a B, non c'è alcuna componente del moto di B che la avvicini o la allontani da A e dal punto di vista di A, B potrebbe benissimo stare ferma. Quindi A raggiungerà B nello stesso tempo che occorrerebbe se B rimanesse ferma.

Gardner non chiede di trovare la traiettoria delle coccinelle, ma solo la distanza percorsa dalle coccinelle prima di incontrarsi. In questo caso il problema è sorprendentemente semplice.
Per simmetria, in ogni istante le 4 coccinelle si trovano ai vertici di un quadrato il cui lato si va restringendo. Il percorso di una coccinella inseguitrice sarà sempre perpendicolare a quello della coccinella inseguita. Ma allora mentre A si avvicina a B, non c'è alcuna componente del moto di B che la avvicini o la allontani da A e dal punto di vista di A, B potrebbe benissimo stare ferma. Quindi A raggiungerà B nello stesso tempo che occorrerebbe se B rimanesse ferma.
Allora la lunghezza di ogni braccio di spirale è pari alla lunghezza del lato del quadrato iniziale e cioè 20 cm.

Generalizziamo!

Generalizziamo!

È abbastanza naturale chiedersi cosa succede se invece di 4 coccinelle abbiamo n insetti che si comportino nello stesso modo.

Generalizziamo!

È abbastanza naturale chiedersi cosa succede se invece di 4 coccinelle abbiamo n insetti che si comportino nello stesso modo.

Problema

Siano dati n insetti disposti ai vertici di un n-agono regolare unitario (cioé inscritto in un cerchio di raggio 1) al tempo $t = 0$. Ciascun insetto si muove verso quello che lo precede in senso antiorario (oppure in verso orario, il problema è simmetrico).

Generalizziamo!

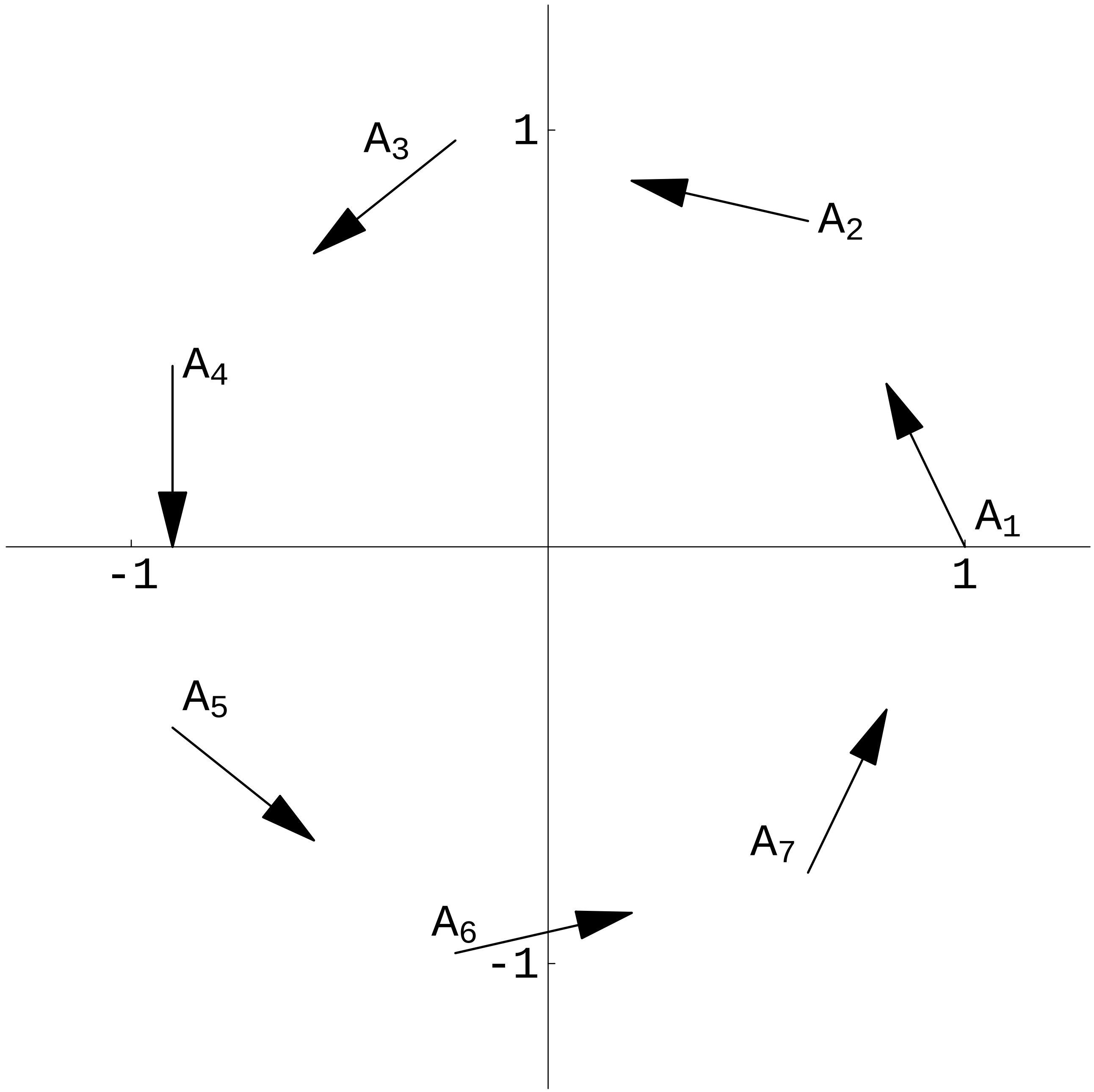
È abbastanza naturale chiedersi cosa succede se invece di 4 coccinelle abbiamo n insetti che si comportino nello stesso modo.

Problema

Siano dati n insetti disposti ai vertici di un n-agono regolare unitario (cioé inscritto in un cerchio di raggio 1) al tempo $t = 0$. Ciascun insetto si muove verso quello che lo precede in senso antiorario (oppure in verso orario, il problema è simmetrico).

Trovare la distanza percorsa da ciascun insetto

Generalizziamo!



Generalizziamo!

Vediamo di analizzare cosa accade dinamicamente. Come prima, dobbiamo considerare qual è la velocità con cui un insetto si avvicina all'insetto precedente, notando che:

Generalizziamo!

Vediamo di analizzare cosa accade dinamicamente. Come prima, dobbiamo considerare qual è la velocità con cui un insetto si avvicina all'insetto precedente, notando che:

- In ogni istante, per simmetria, le coccinelle si trovano ai vertici di un n - agono regolare.

Generalizziamo!

Vediamo di analizzare cosa accade dinamicamente. Come prima, dobbiamo considerare qual è la velocità con cui un insetto si avvicina all'insetto precedente, notando che:

- In ogni istante, per simmetria, le coccinelle si trovano ai vertici di un n - agono regolare.
- L'angolo esterno è pari a $\frac{2\pi}{n}$ e possiamo considerarlo sempre compreso tra 0 e π

Vediamo di analizzare cosa accade dinamicamente. Come prima, dobbiamo considerare qual è la velocità con cui un insetto si avvicina all'insetto precedente, notando che:

- In ogni istante, per simmetria, le coccinelle si trovano ai vertici di un n - agono regolare.
- L'angolo esterno è pari a $\frac{2\pi}{n}$ e possiamo considerarlo sempre compreso tra 0 e π
- La lunghezza del lato è $2\sin\frac{\pi}{n}$, e quindi, usando le formule di bisezione, $\sqrt{2(1-\cos\frac{2\pi}{n})}$.

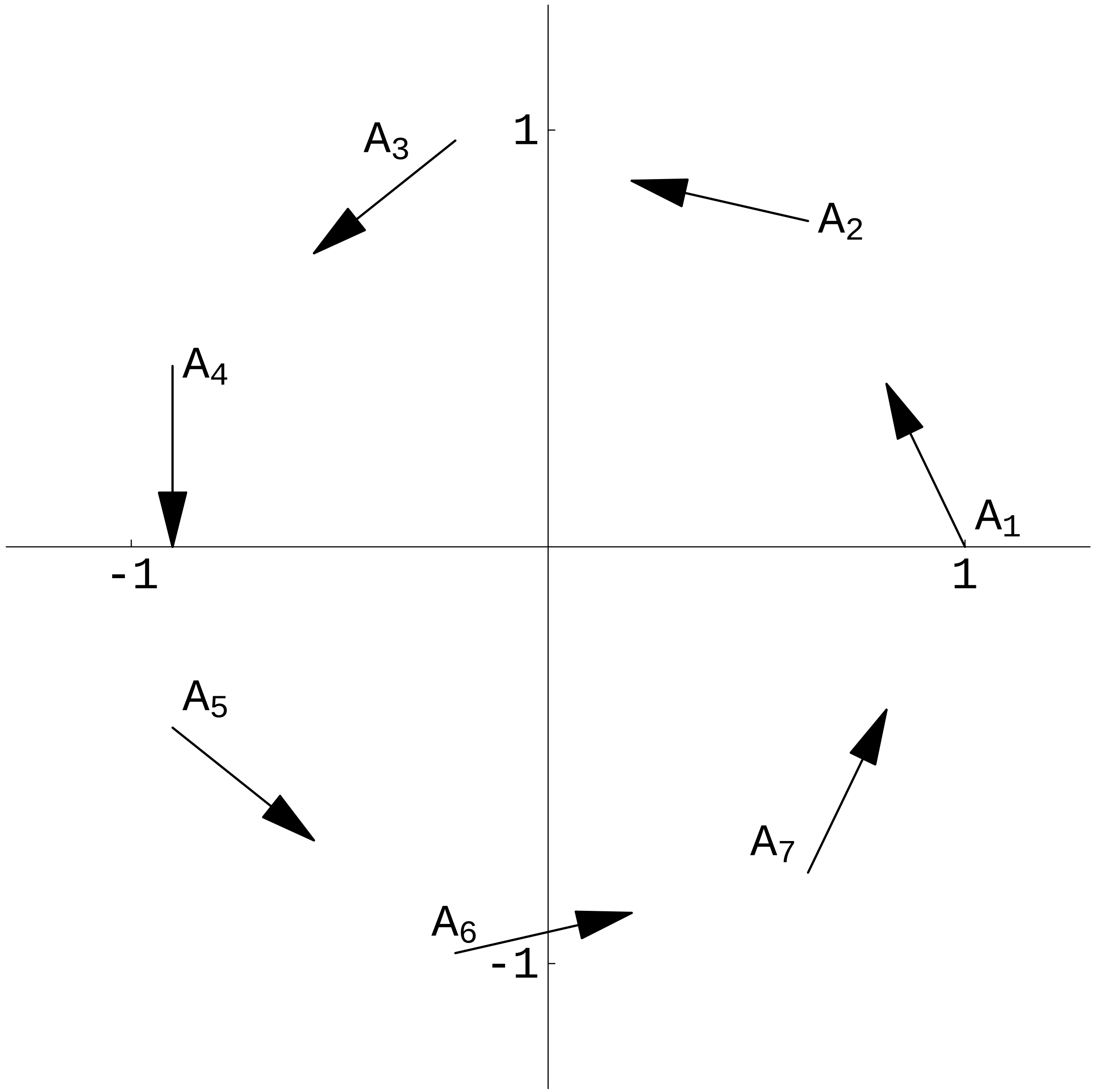
Generalizziamo!

Vediamo di analizzare cosa accade dinamicamente. Come prima, dobbiamo considerare qual è la velocità con cui un insetto si avvicina all'insetto precedente, notando che:

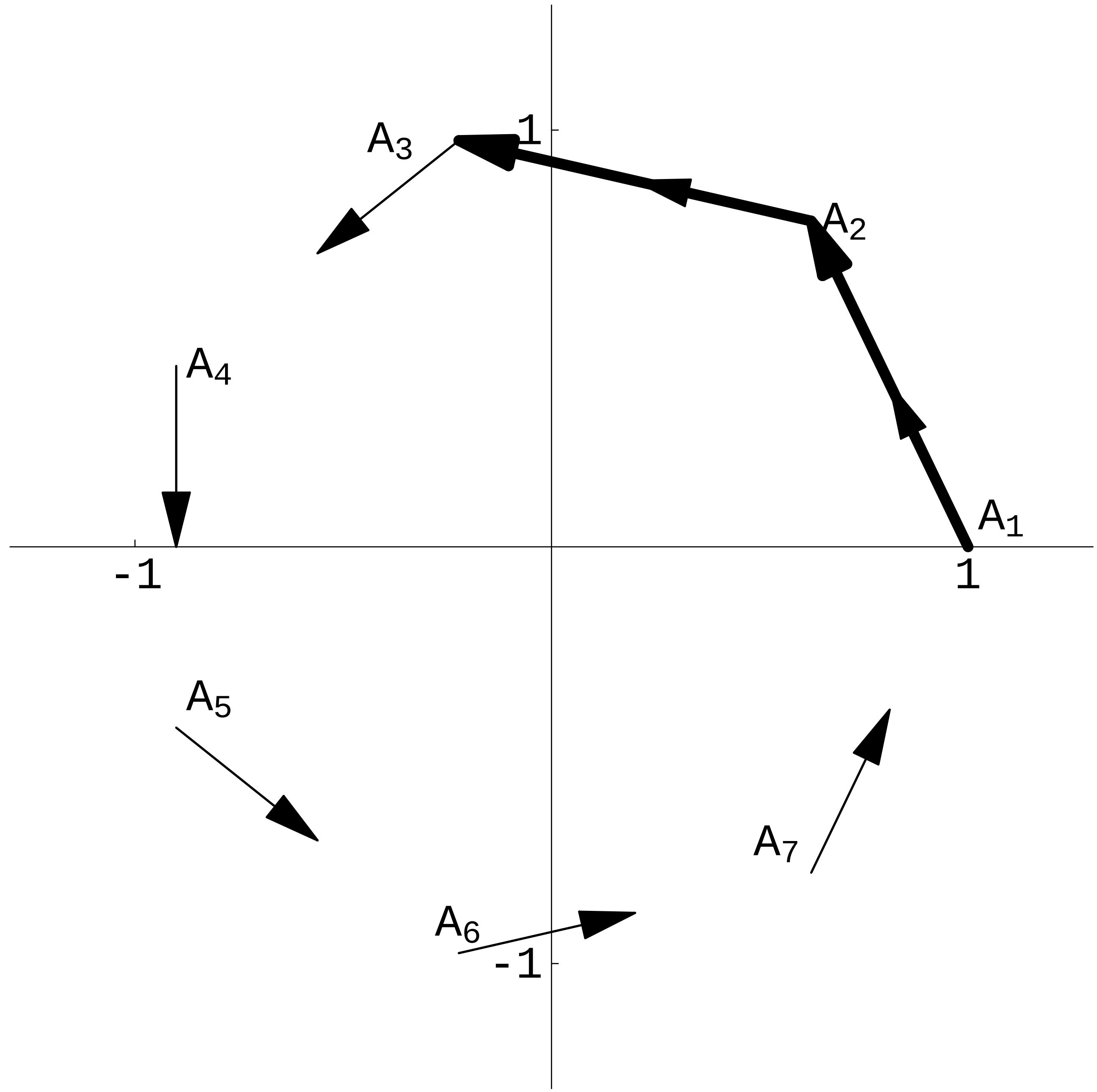
- In ogni istante, per simmetria, le coccinelle si trovano ai vertici di un n - agono regolare.
- L'angolo esterno è pari a $\frac{2\pi}{n}$ e possiamo considerarlo sempre compreso tra 0 e π
- La lunghezza del lato è $2\sin\frac{\pi}{n}$, e quindi, usando le formule di bisezione, $\sqrt{2(1-\cos\frac{2\pi}{n})}$.

Sia $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, per comodità (e anche per un motivo che vedremo dopo...).

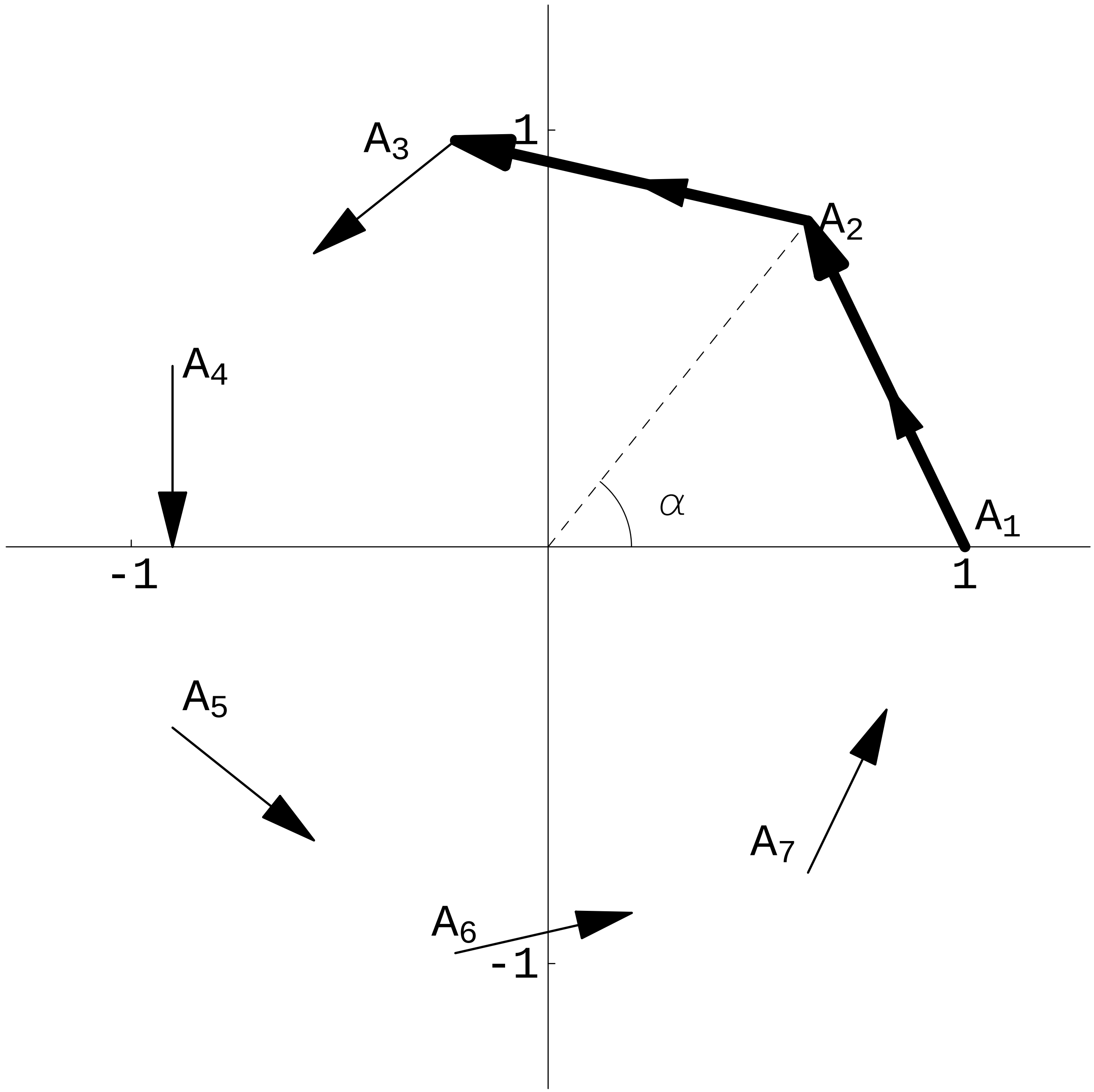
Generalizziamo!



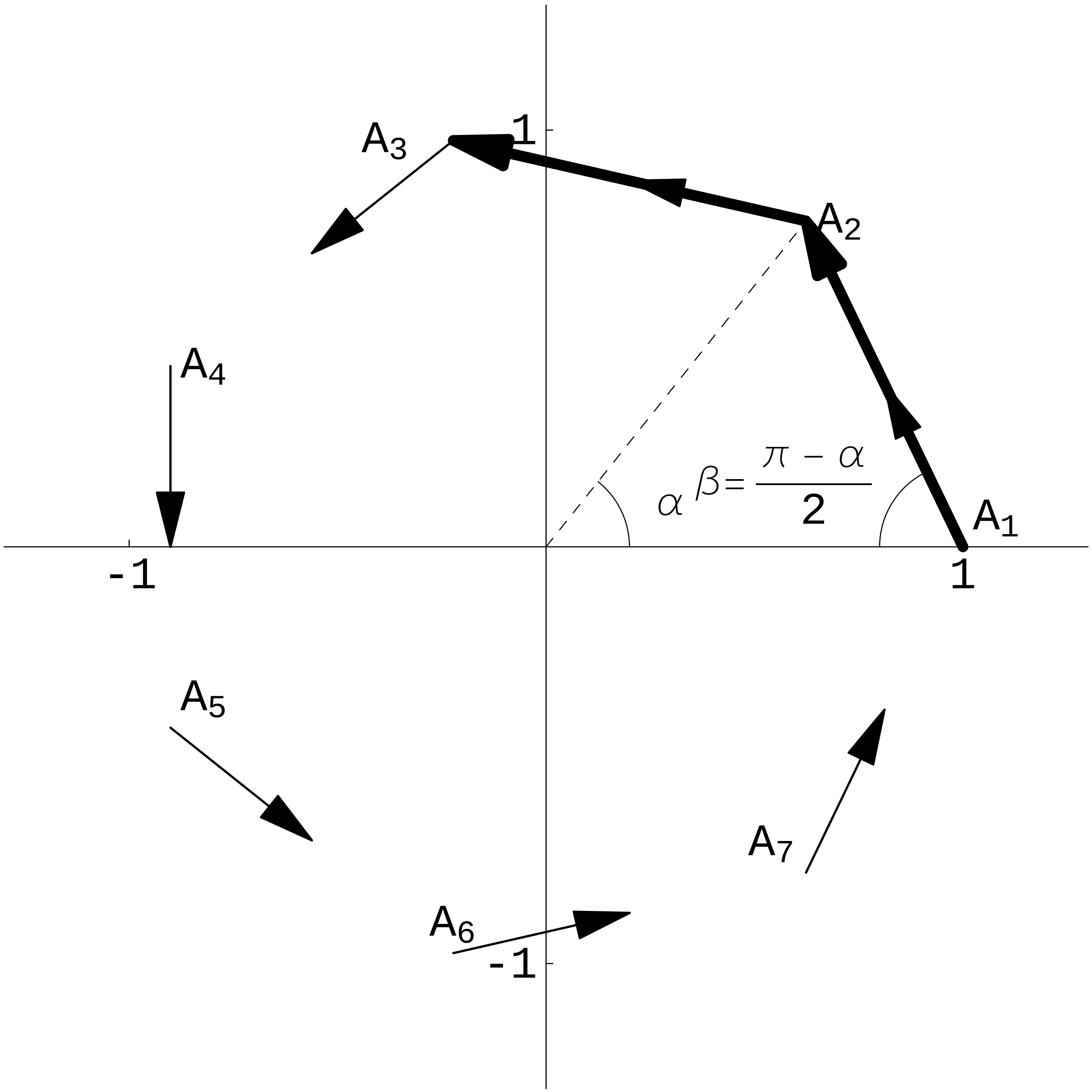
Generalizziamo!



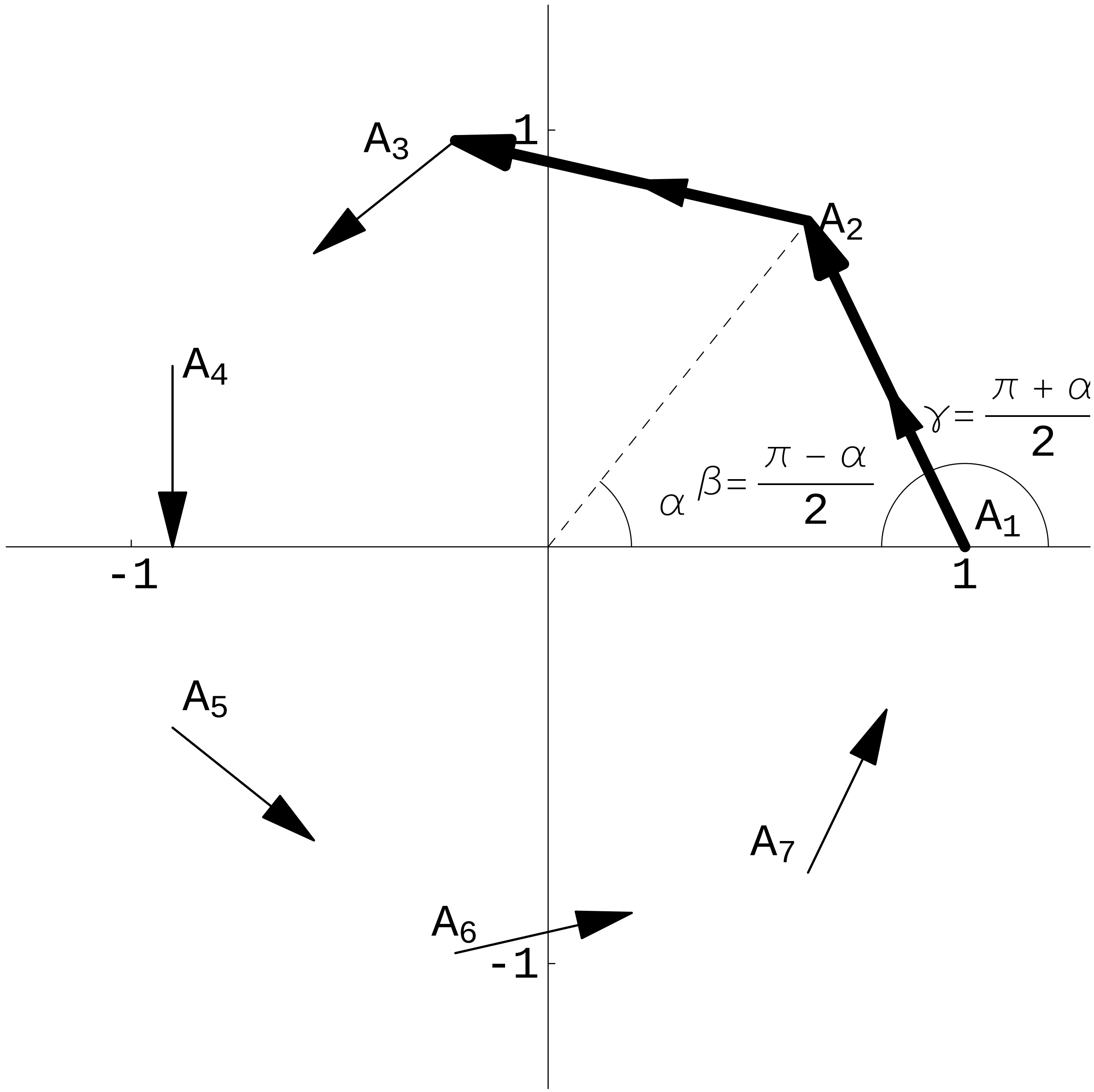
Generalizziamo!

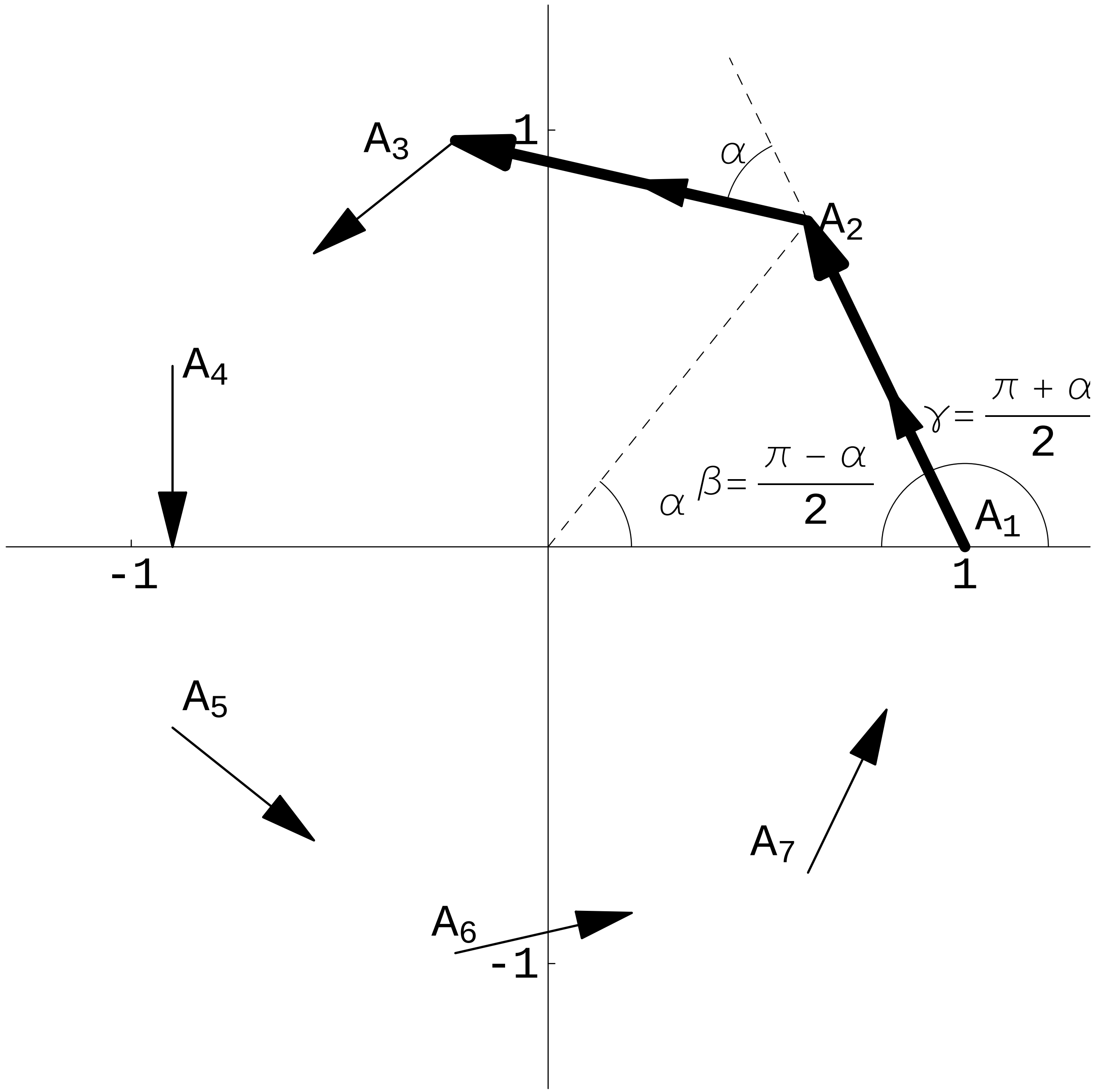


Generalizziamo!



Generalizziamo!





A3
1
α
A2
A4
$\gamma = \frac{\pi + \alpha}{2}$
$\beta = \frac{\pi - \alpha}{2}$
α
A1
-1
1
A5
A7
A6
-1

Generalizziamo!

- La velocità dell'insetto A sia v in modulo. L'angolo tra la direzione del suo moto e la direzione del moto del 'fuggitivo' B è pari all'angolo esterno del poligono. Quindi la componente del moto di B lungo la direzione del moto di A è $v \cos \alpha$.

Generalizziamo!

- La velocità dell'insetto A sia v in modulo. L'angolo tra la direzione del suo moto e la direzione del moto del 'fuggitivo' B è pari all'angolo esterno del poligono. Quindi la componente del moto di B lungo la direzione del moto di A è $v\cos\alpha$.
- La velocità con cui A si avvicina a B è $v(1-\cos\alpha)$. Il rapporto tra la velocità di A e la velocità di avvicinamento è $\frac{1}{1-\cos\alpha}$.

Generalizziamo!

- La velocità dell'insetto A sia v in modulo. L'angolo tra la direzione del suo moto e la direzione del moto del 'fuggitivo' B è pari all'angolo esterno del poligono. Quindi la componente del moto di B lungo la direzione del moto di A è $v \cos \alpha$.
- La velocità con cui A si avvicina a B è $v(1 - \cos \alpha)$. Il rapporto tra la velocità di A e la velocità di avvicinamento è $\frac{1}{1-\cos \alpha}$.
- Come nel caso delle 4 coccinelle, la lunghezza totale del percorso sarà pari alla lunghezza del lato del poligono, moltiplicata per il fattore di proporzione delle velocità.

Generalizziamo!

- La velocità dell'insetto A sia v in modulo. L'angolo tra la direzione del suo moto e la direzione del moto del 'fuggitivo' B è pari all'angolo esterno del poligono. Quindi la componente del moto di B lungo la direzione del moto di A è $v\cos\alpha$.
- La velocità con cui A si avvicina a B è $v(1-\cos\alpha)$. Il rapporto tra la velocità di A e la velocità di avvicinamento è $\frac{1}{1-\cos\alpha}$.
- Come nel caso delle 4 coccinelle, la lunghezza totale del percorso sarà pari alla lunghezza del lato del poligono, moltiplicata per il fattore di proporzione delle velocità.

$$\frac{\sqrt{2(1-\cos\alpha)}}{1-\cos\alpha} = \sqrt{\frac{2}{1-\cos\alpha}}$$

Dobbiamo proprio fermarci?

Dobbiamo proprio fermarci?

Oramai sappiamo calcolare la lunghezza di una spirale logaritmica di un qualche tipo, cioè di quelle corripondenti all' inseguimento di n insetti. Tuttavia:

Dobbiamo proprio fermarci?

Oramai sappiamo calcolare la lunghezza di una spirale logaritmica di un qualche tipo, cioè di quelle corripondenti all' inseguimento di n insetti. Tuttavia:

- La formula per la lunghezza della spirale dipende da α, che fino ad ora aveva un preciso significato.

Dobbiamo proprio fermarci?

Oramai sappiamo calcolare la lunghezza di una spirale logaritmica di un qualche tipo, cioè di quelle corripondenti all' inseguimento di n insetti. Tuttavia:

- La formula per la lunghezza della spirale dipende da α, che fino ad ora aveva un preciso significato.
- La funzione che esprime la lunghezza

$$\sqrt{\frac{2}{1-\cos\alpha}}$$

è continua in $\alpha \neq 0$.

Dobbiamo proprio fermarci?

Oramai sappiamo calcolare la lunghezza di una spirale logaritmica di un qualche tipo, cioè di quelle corripondenti all' inseguimento di n insetti. Tuttavia:

- La formula per la lunghezza della spirale dipende da α, che fino ad ora aveva un preciso significato.
- La funzione che esprime la lunghezza

$$\sqrt{\frac{2}{1-\cos\alpha}}$$

  è continua in $\alpha \neq 0$.

  - **Questo ci suggerisce che è possibile trovare una formula semplice per la lunghezza di una spirale logartmica qualsiasi.**

- In generale, una spirale logaritmica ha equazione polare $(e^{-\theta t}, t)$, con $\theta > 0$. La corrispondente equazione cartesiana sarà

$$(e^{-\theta t} \cos t, e^{-\theta t} \sin t) \tag{1.1}$$

Dobbiamo proprio fermarci?

- In generale, una spirale logaritmica ha equazione polare $(e^{-\theta t}, t)$, con $\theta > 0$. La corrispondente equazione cartesiana sarà

$$(e^{-\theta t}\cos t, e^{-\theta t}\sin t) \tag{1.1}$$

  - **Sto considerando solo spirali che passano per il punto $(1, 0)$ all'istante 0. Dovrebbe essere sufficiente una moltiplicazione, per ottenere la soluzione nel caso generale.**

Dobbiamo proprio fermarci?

- Nel problema degli n insetti conosciamo il coefficiente angolare della tangente nel punto $(1,0)$, che è $-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Dobbiamo proprio fermarci?

- Nel problema degli n insetti conosciamo il coefficiente angolare della tangente nel punto $(1, 0)$, che è $-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.
- Il coefficiente angolare della retta tangente alla spirale 1.1 in $t = 0$ è dato dal rapporto delle derivate delle componenti calcolate in quel punto:

$$\left.\frac{y'}{x'}\right|_{t=0} = \left.\frac{-\theta e^{-\theta t}\cos t - e^{-\theta t}\sin t}{-\theta e^{-\theta t}\sin t + e^{-\theta t}\cos t}\right|_{t=0} = -\frac{1}{\theta}$$

Dobbiamo proprio fermarci?

- Nel problema degli n insetti conosciamo il coefficiente angolare della tangente nel punto $(1, 0)$, che è $-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.
- Il coefficiente angolare della retta tangente alla spirale 1.1 in $t = 0$ è dato dal rapporto delle derivate delle componenti calcolate in quel punto:

$$\left.\frac{y'}{x'}\right|_{t=0} = \left.\frac{-\theta e^{-\theta t}\cos t - e^{-\theta t}\sin t}{-\theta e^{-\theta t}\sin t + e^{-\theta t}\cos t}\right|_{t=0} = -\frac{1}{\theta}$$

- Pertanto:

$$-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\theta}$$

- Nel problema degli n insetti conosciamo il coefficiente angolare della tangente nel punto $(1, 0)$, che è $-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.
- Il coefficiente angolare della retta tangente alla spirale 1.1 in $t = 0$ è dato dal rapporto delle derivate delle componenti calcolate in quel punto:

$$\left.\frac{y'}{x'}\right|_{t=0} = \left.\frac{-\theta e^{-\theta t}\cos t - e^{-\theta t}\sin t}{-\theta e^{-\theta t}\sin t + e^{-\theta t}\cos t}\right|_{t=0} = -\frac{1}{\theta}$$

- Pertanto:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\theta}$$

Dobbiamo proprio fermarci?

- Nel problema degli n insetti conosciamo il coefficiente angolare della tangente nel punto $(1,0)$, che è $-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.
- Il coefficiente angolare della retta tangente alla spirale 1.1 in $t=0$ è dato dal rapporto delle derivate delle componenti calcolate in quel punto:

$$\left.\frac{y'}{x'}\right|_{t=0} = \left.\frac{-\theta e^{-\theta t}\cos t - e^{-\theta t}\sin t}{-\theta e^{-\theta t}\sin t + e^{-\theta t}\cos t}\right|_{t=0} = -\frac{1}{\theta}$$

- Pertanto:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \theta$$

- Nel problema degli n insetti conosciamo il coefficiente angolare della tangente nel punto $(1,0)$, che è $-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.
- Il coefficiente angolare della retta tangente alla spirale 1.1 in $t = 0$ è dato dal rapporto delle derivate delle componenti calcolate in quel punto:

$$\left.\frac{y'}{x'}\right|_{t=0} = \left.\frac{-\theta e^{-\theta t}\cos t - e^{-\theta t}\sin t}{-\theta e^{-\theta t}\sin t + e^{-\theta t}\cos t}\right|_{t=0} = -\frac{1}{\theta}$$

- Pertanto:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \theta$$

- Riassumendo:

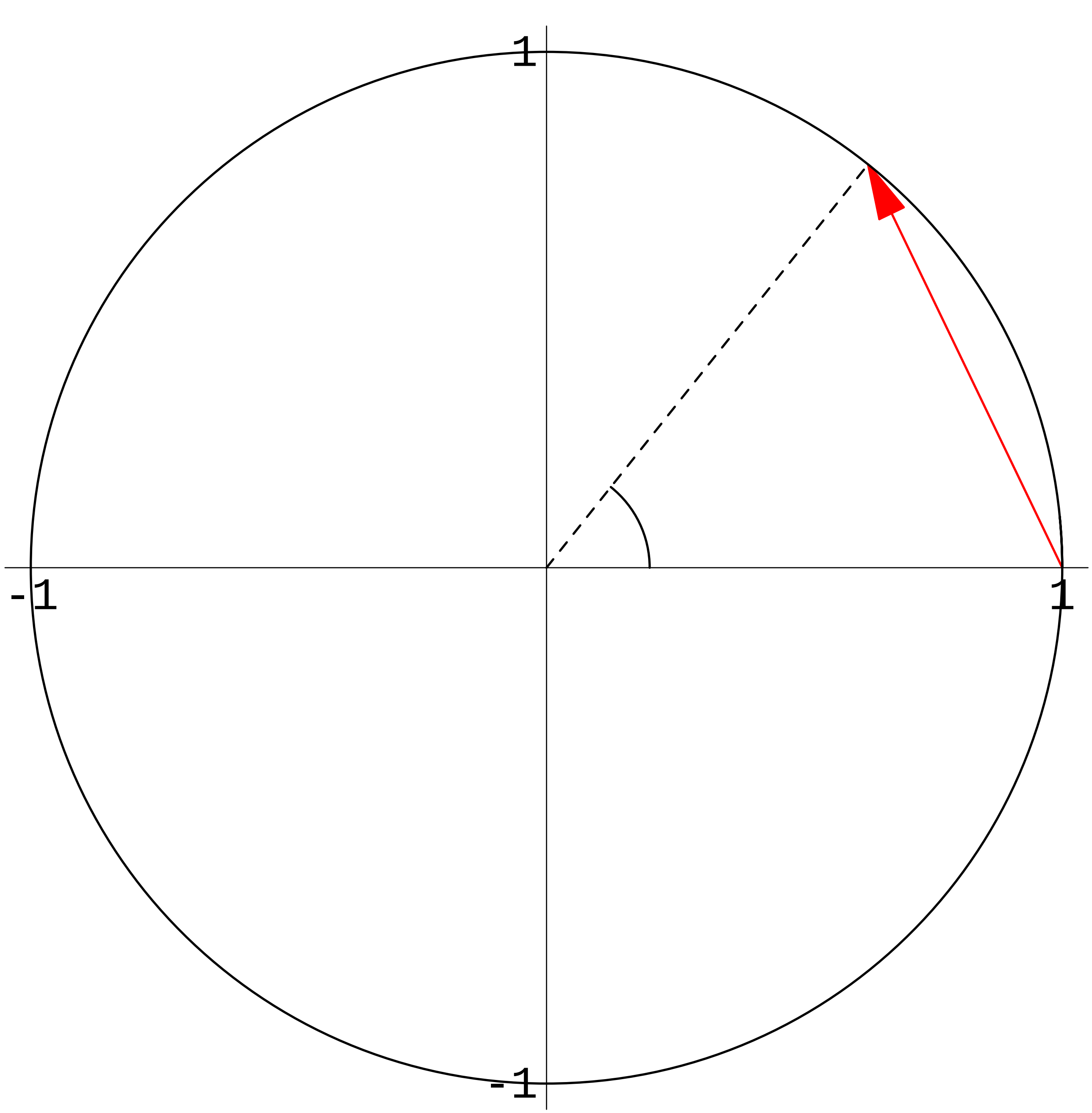
$$\boxed{\theta = \tan\tfrac{\alpha}{2}} \text{ e } \boxed{\alpha = 2\,\mathrm{atan}\,\theta}$$

Quindi, a partire dall'equazione della spirale, possiamo ottenere l'angolo tra il primo e il secondo insetto. Questo non significa che ci troviamo nella stessa situazione del problema iniziale. Infatti abbiamo le seguenti possibilità:

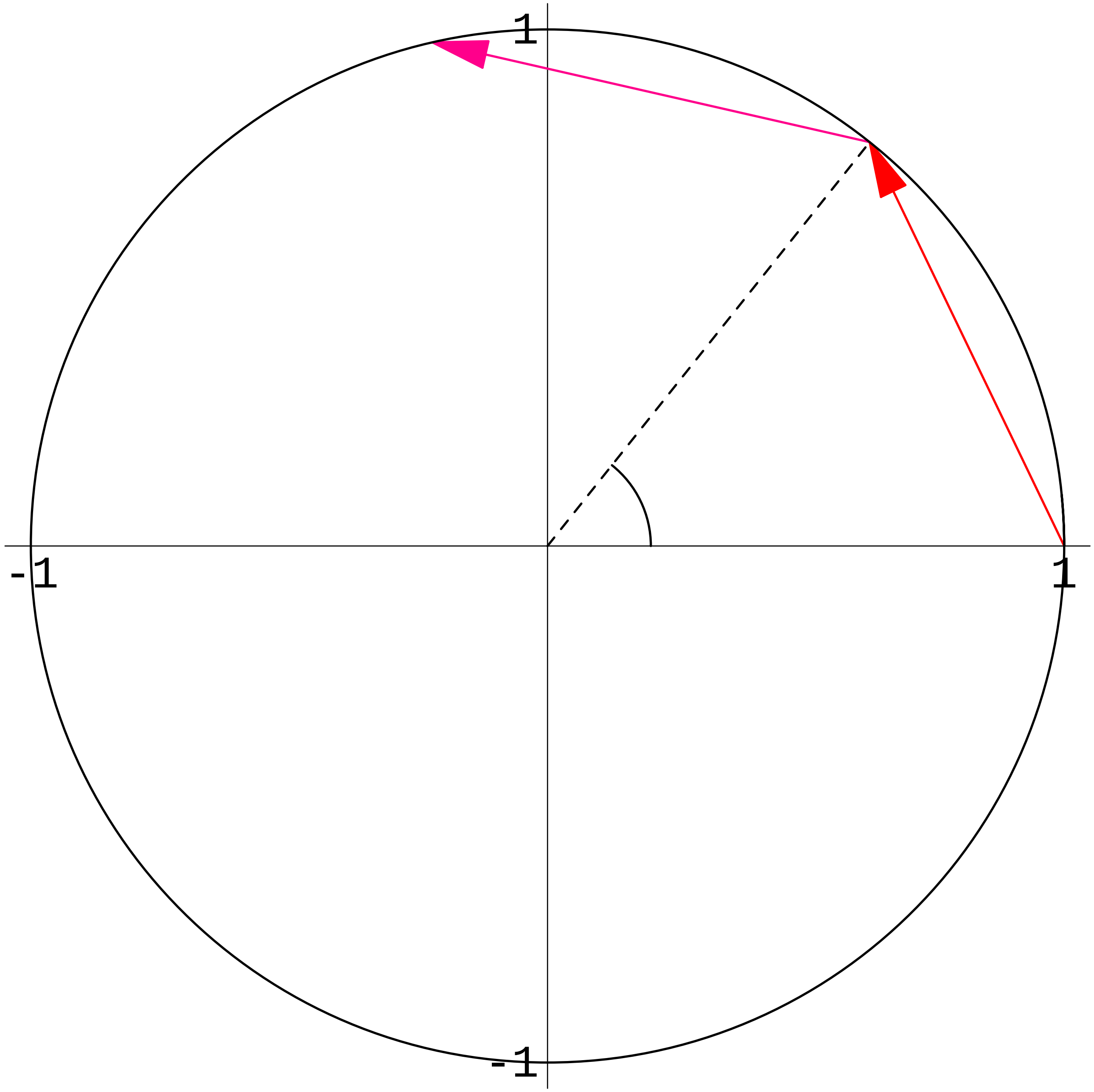
Quindi, a partire dall'equazione della spirale, possiamo ottenere l'angolo tra il primo e il secondo insetto. Questo non significa che ci troviamo nella stessa situazione del problema iniziale. Infatti abbiamo le seguenti possibilità:

- Se $\alpha = \alpha(\theta)$ divide 2π, allora siamo nella situazione iniziale (nell'esempio, $\alpha = \frac{2\pi}{7}$):

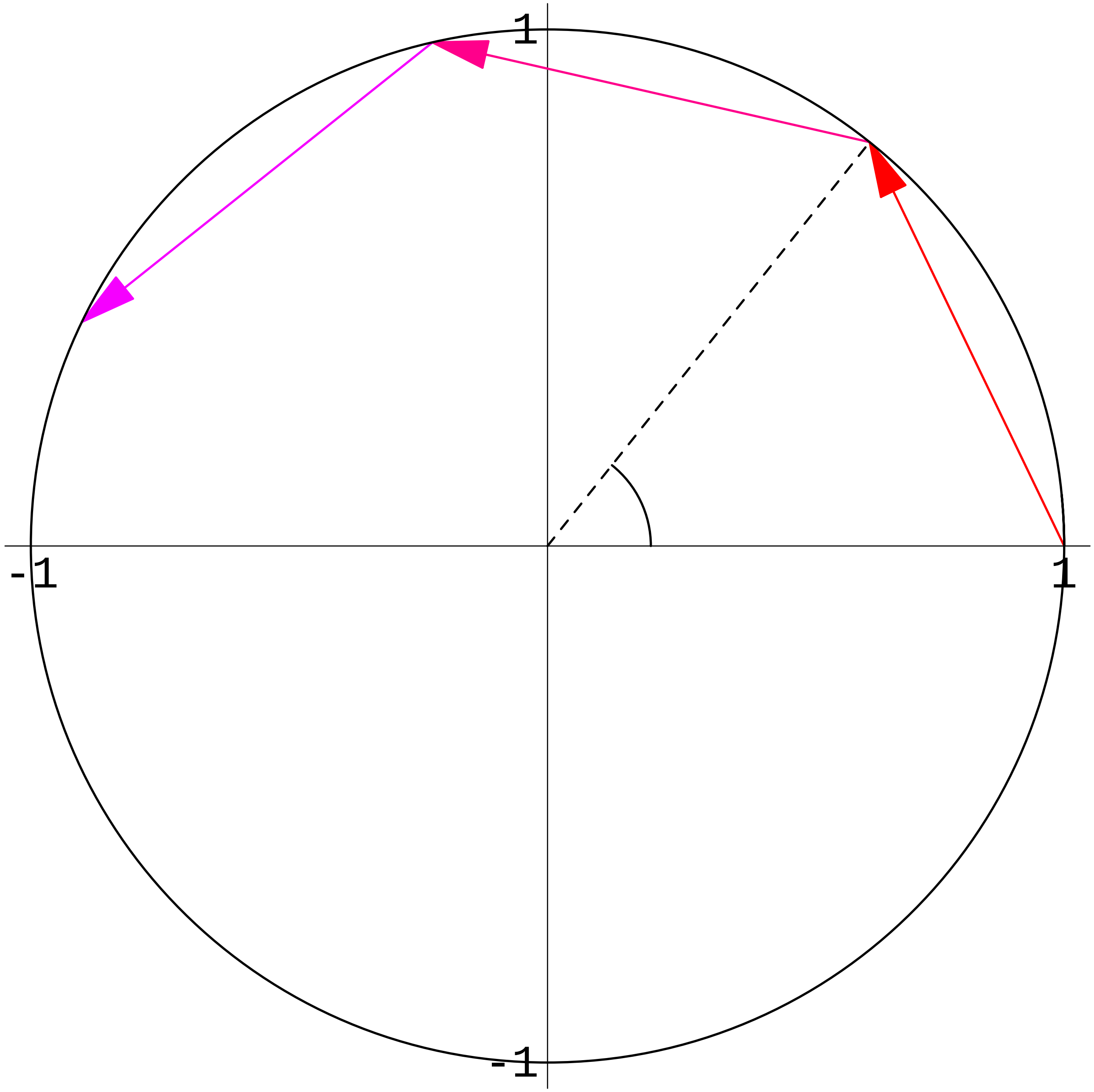
Dobbiamo proprio fermarci?



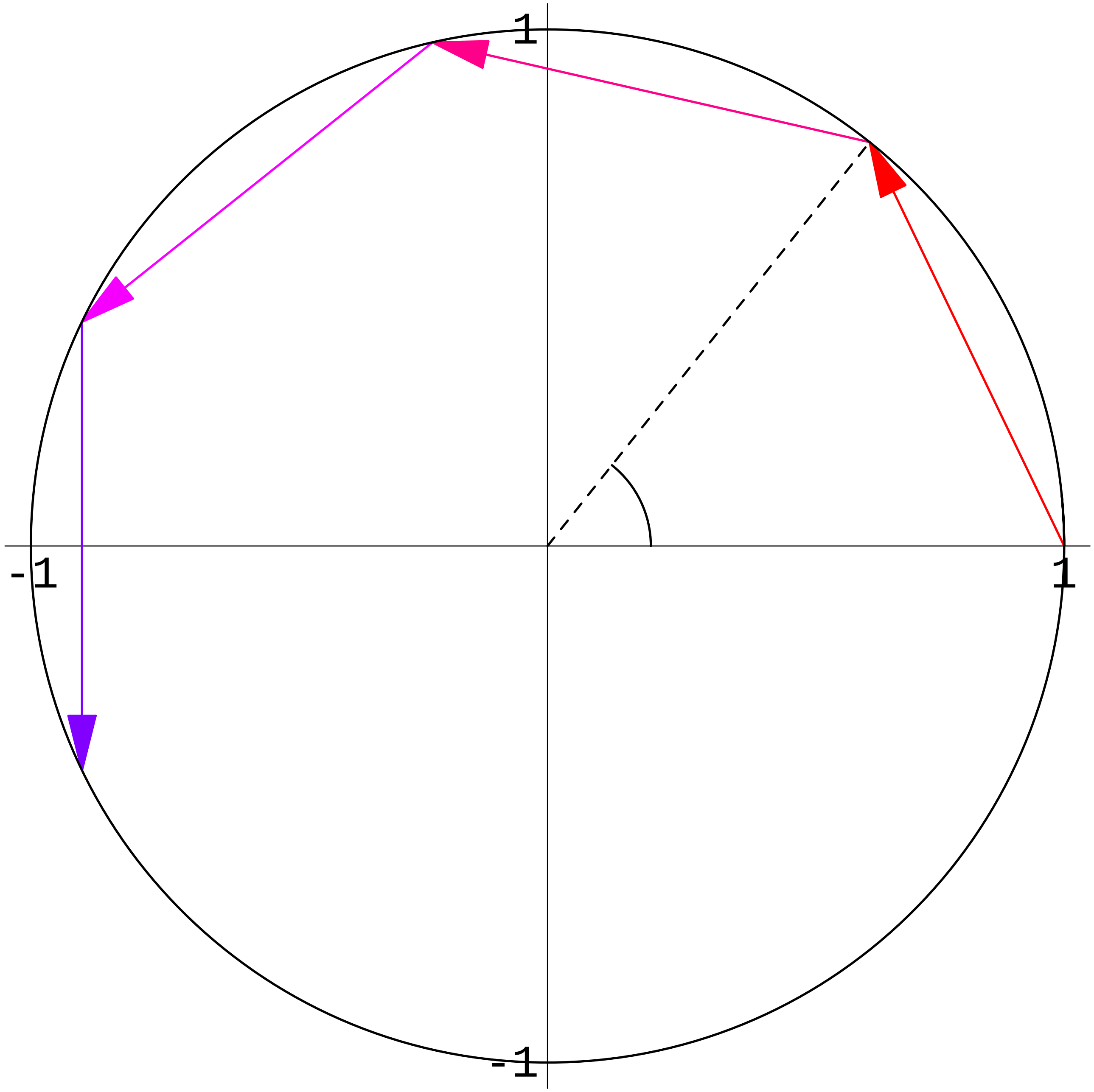
Dobbiamo proprio fermarci?



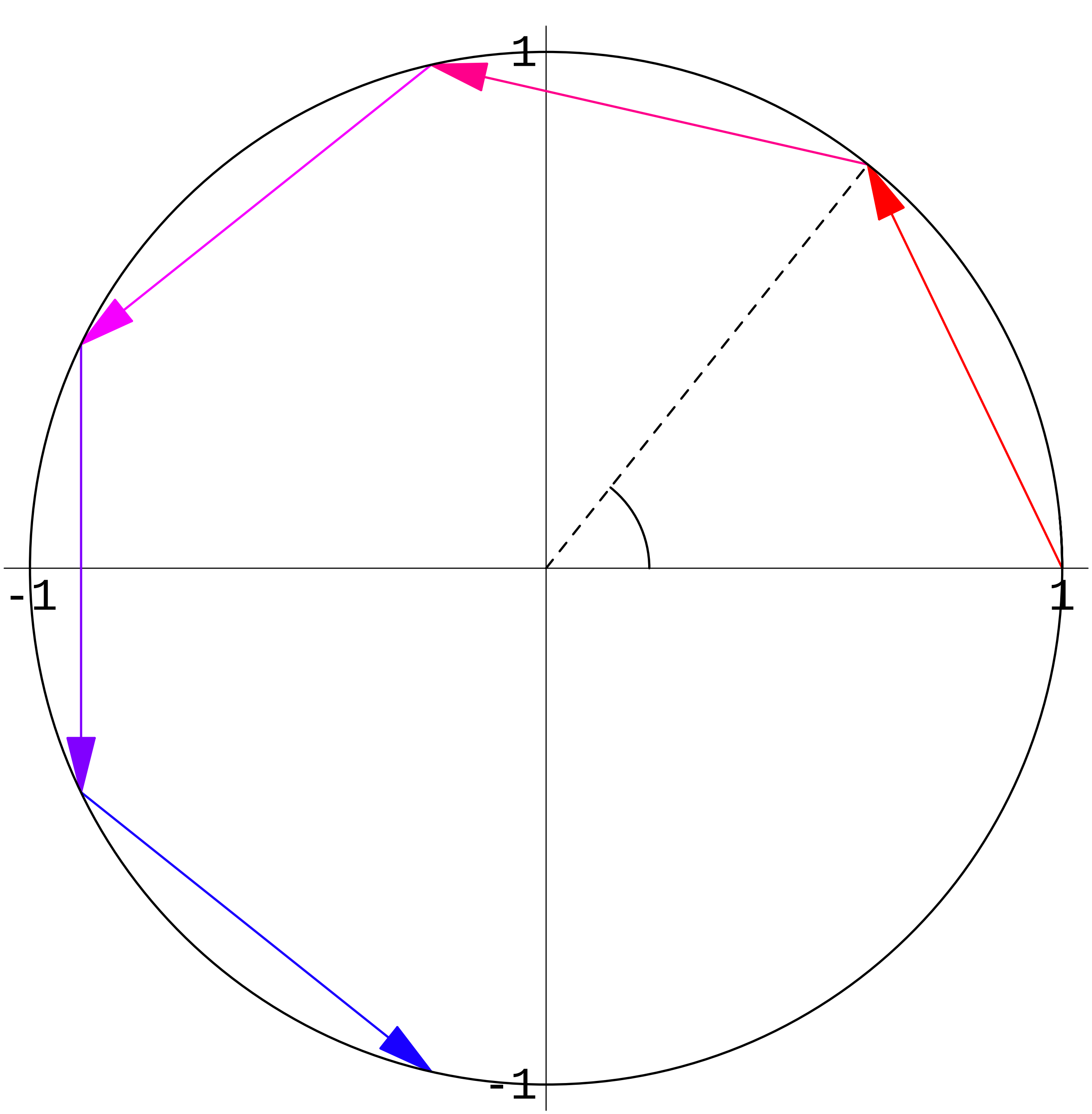
Dobbiamo proprio fermarci?



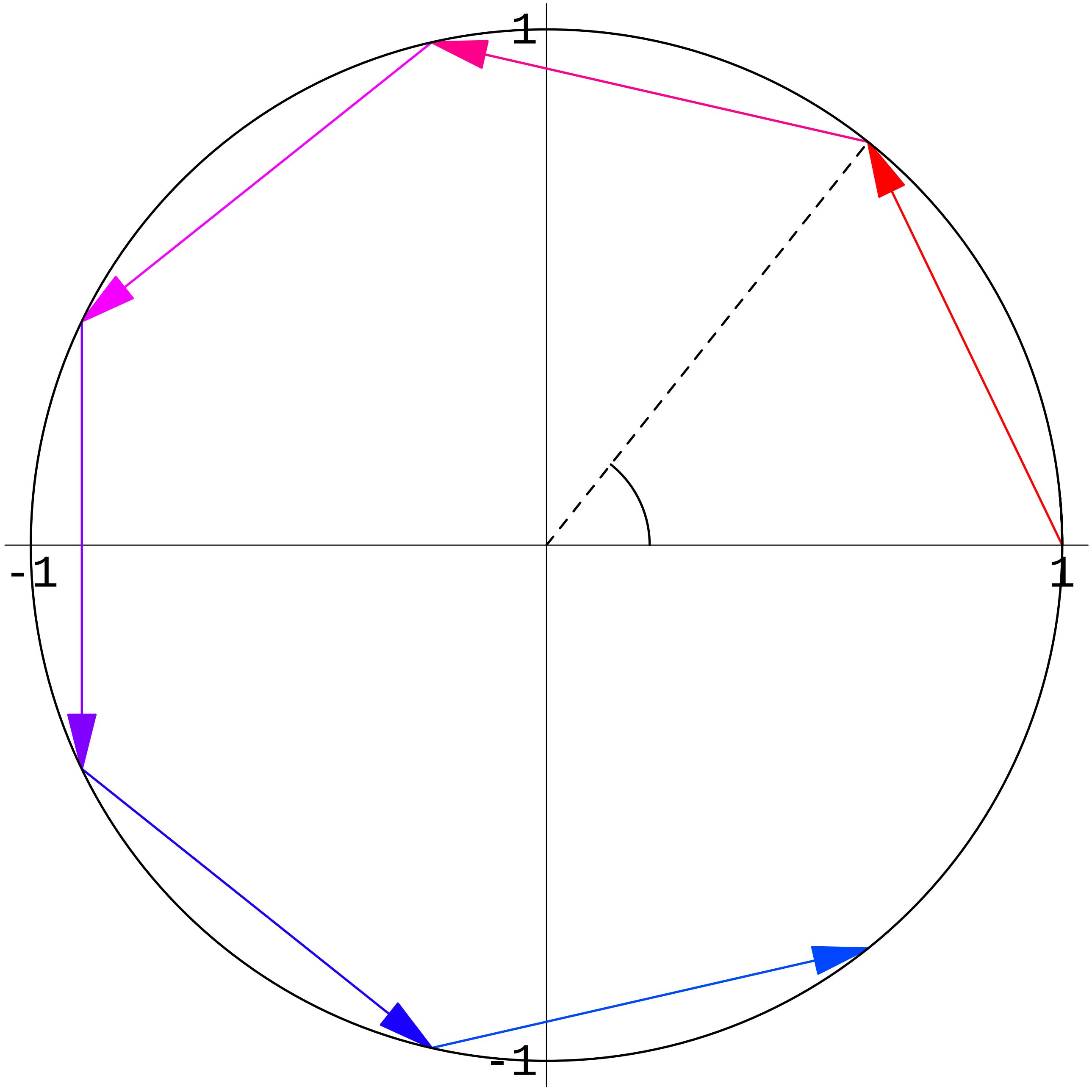
Dobbiamo proprio fermarci?



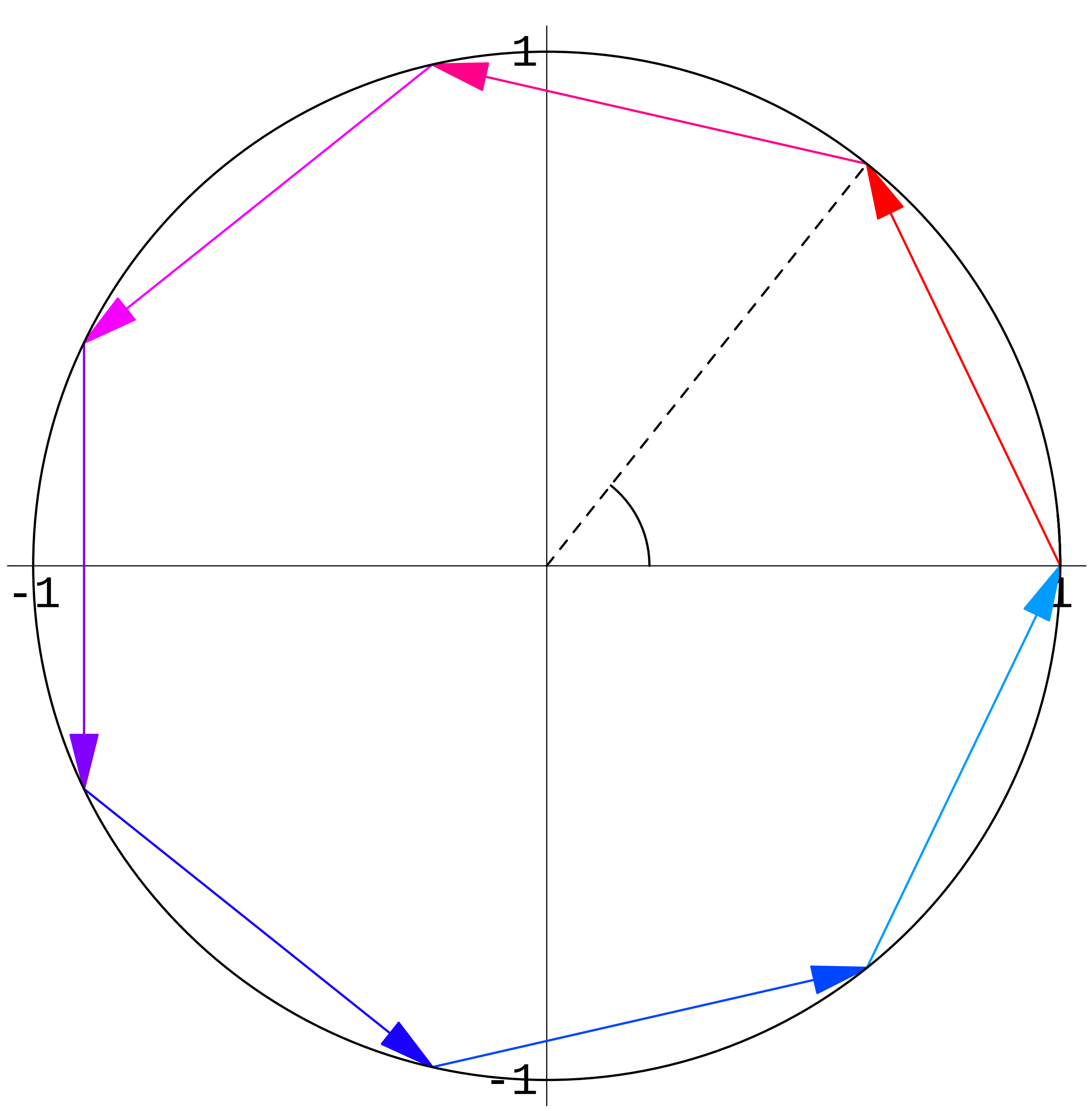
Dobbiamo proprio fermarci?



Dobbiamo proprio fermarci?



Dobbiamo proprio fermarci?



Quindi, a partire dall'equazione della spirale, possiamo ottenere l'angolo tra il primo e il secondo insetto. Questo non significa che ci troviamo nella stessa situazione del problema iniziale. Infatti abbiamo le seguenti possibilità:

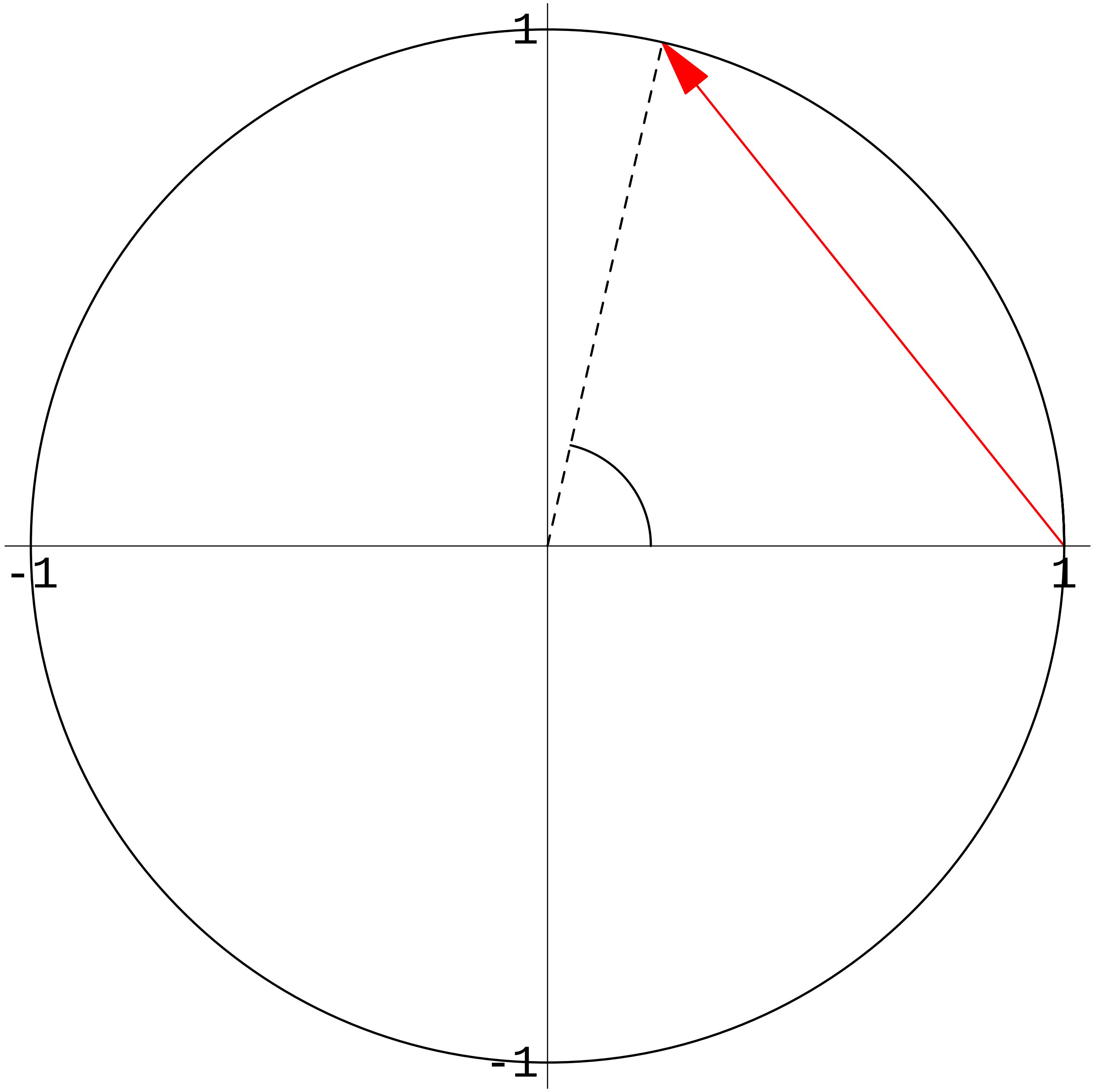
- Se $\alpha = \alpha(\theta)$ divide 2π, allora siamo nella situazione iniziale.

Dobbiamo proprio fermarci?

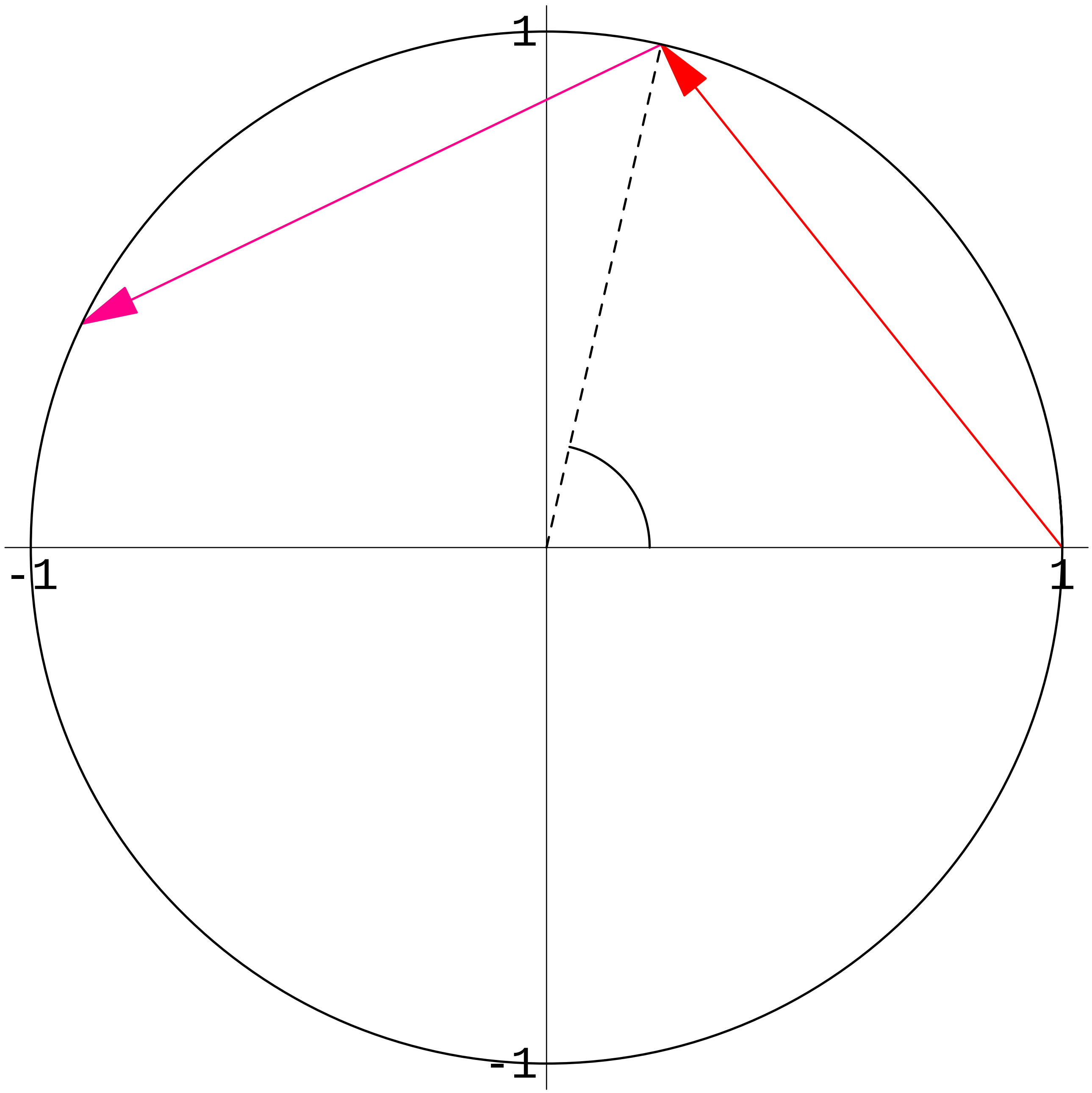
Quindi, a partire dall'equazione della spirale, possiamo ottenere l'angolo tra il primo e il secondo insetto. Questo non significa che ci troviamo nella stessa situazione del problema iniziale. Infatti abbiamo le seguenti possibilità:

- Se $\alpha = \alpha(\theta)$ divide 2π, allora siamo nella situazione iniziale.
- Se α divide un multiplo intero di 2π, allora siamo in un problema con un numero finito di insetti che si inseguono, ma questi non si seguono necessariamente nell'ordine, ma a salti costanti (nell'esempio, $\alpha = \frac{3\pi}{7}$):

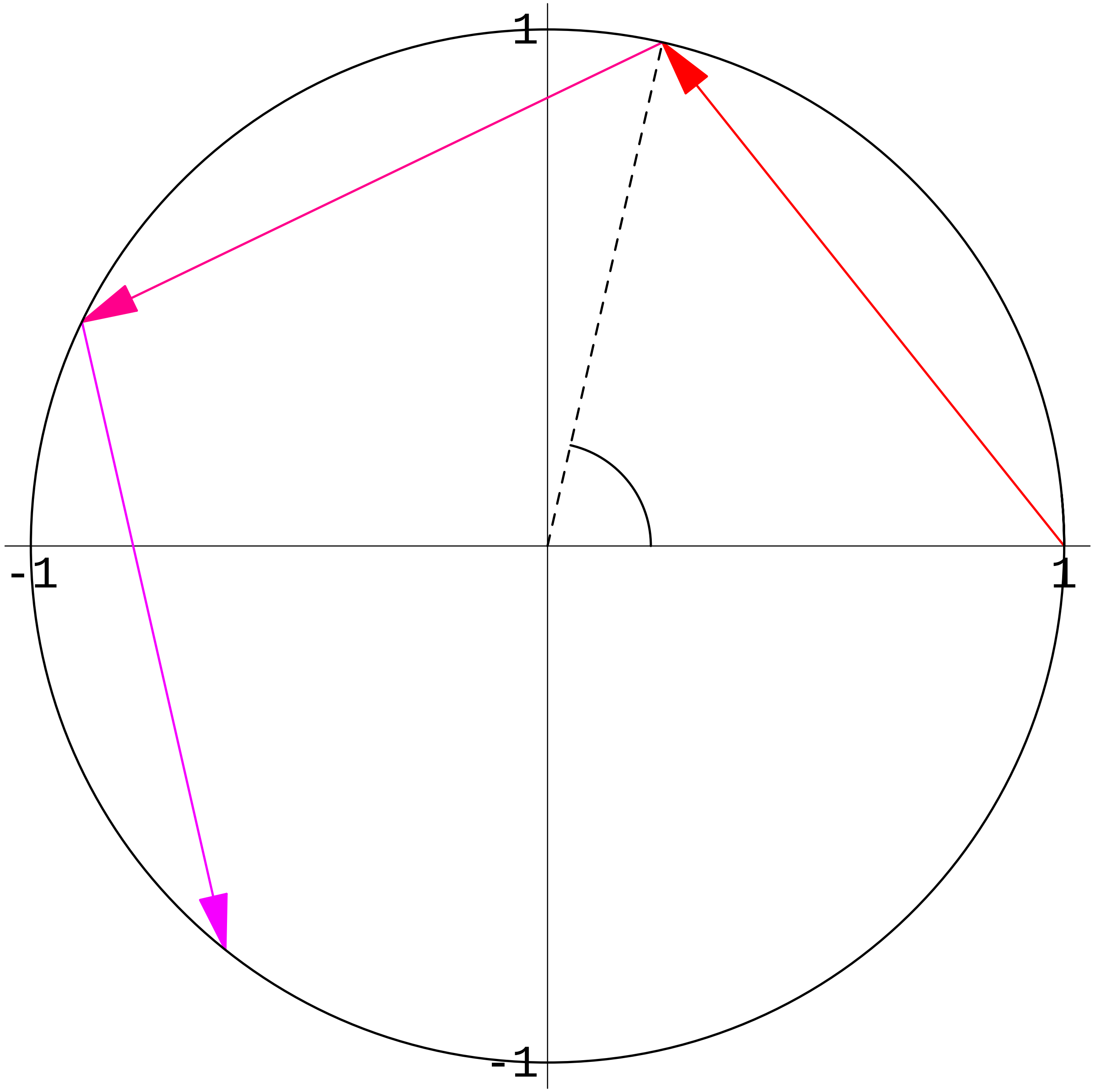
Dobbiamo proprio fermarci?



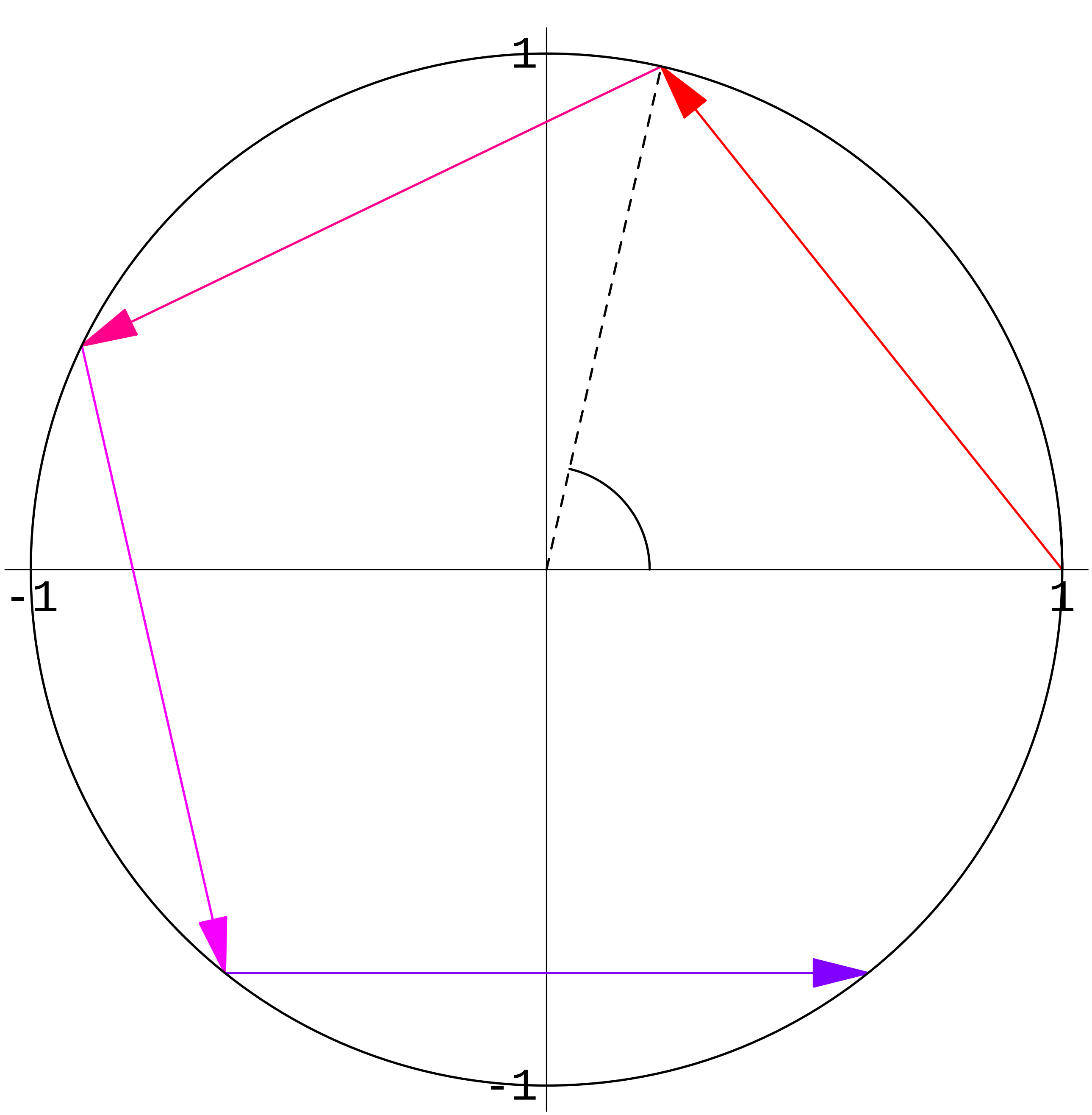
Dobbiamo proprio fermarci?



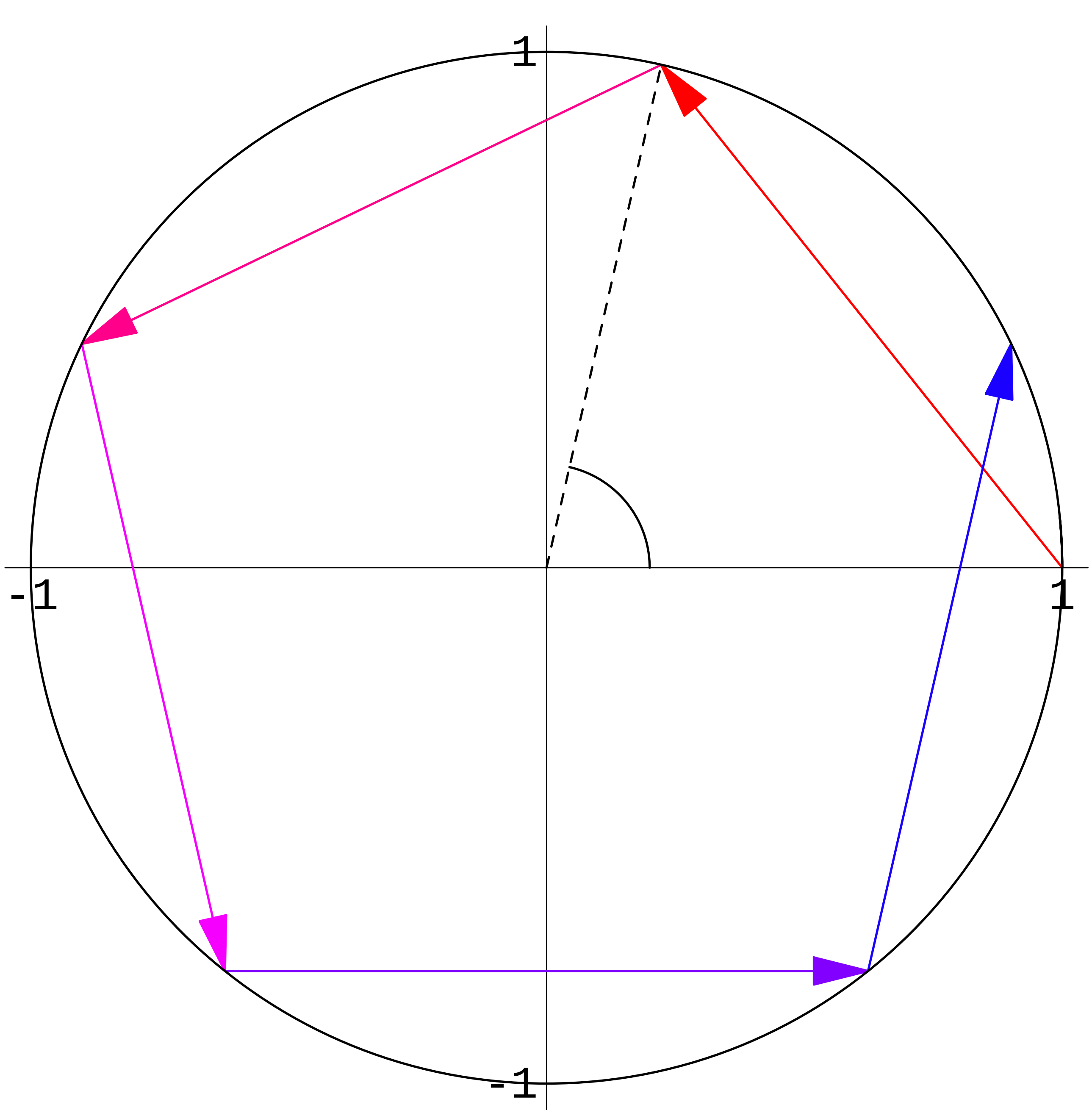
Dobbiamo proprio fermarci?



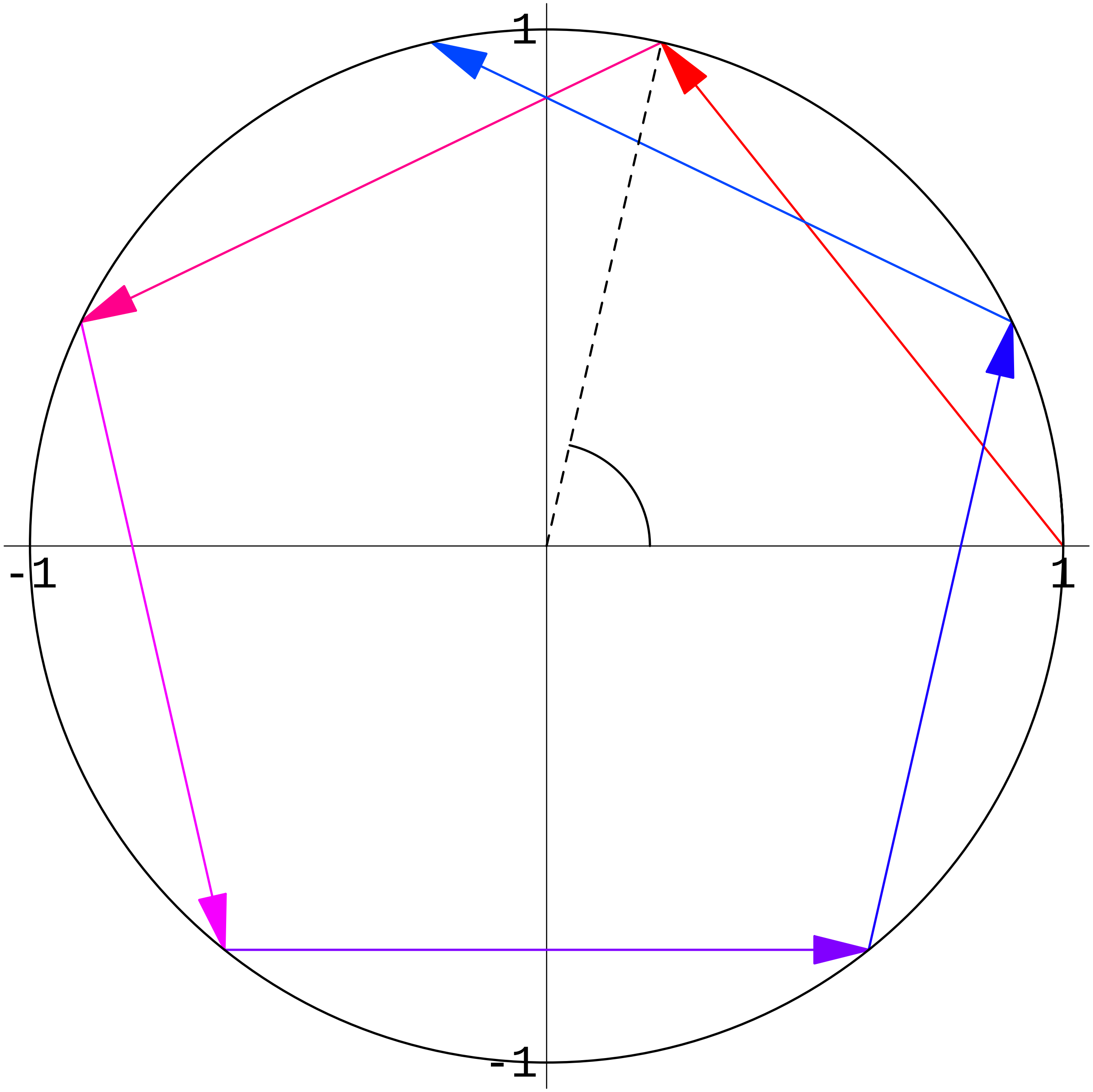
Dobbiamo proprio fermarci?



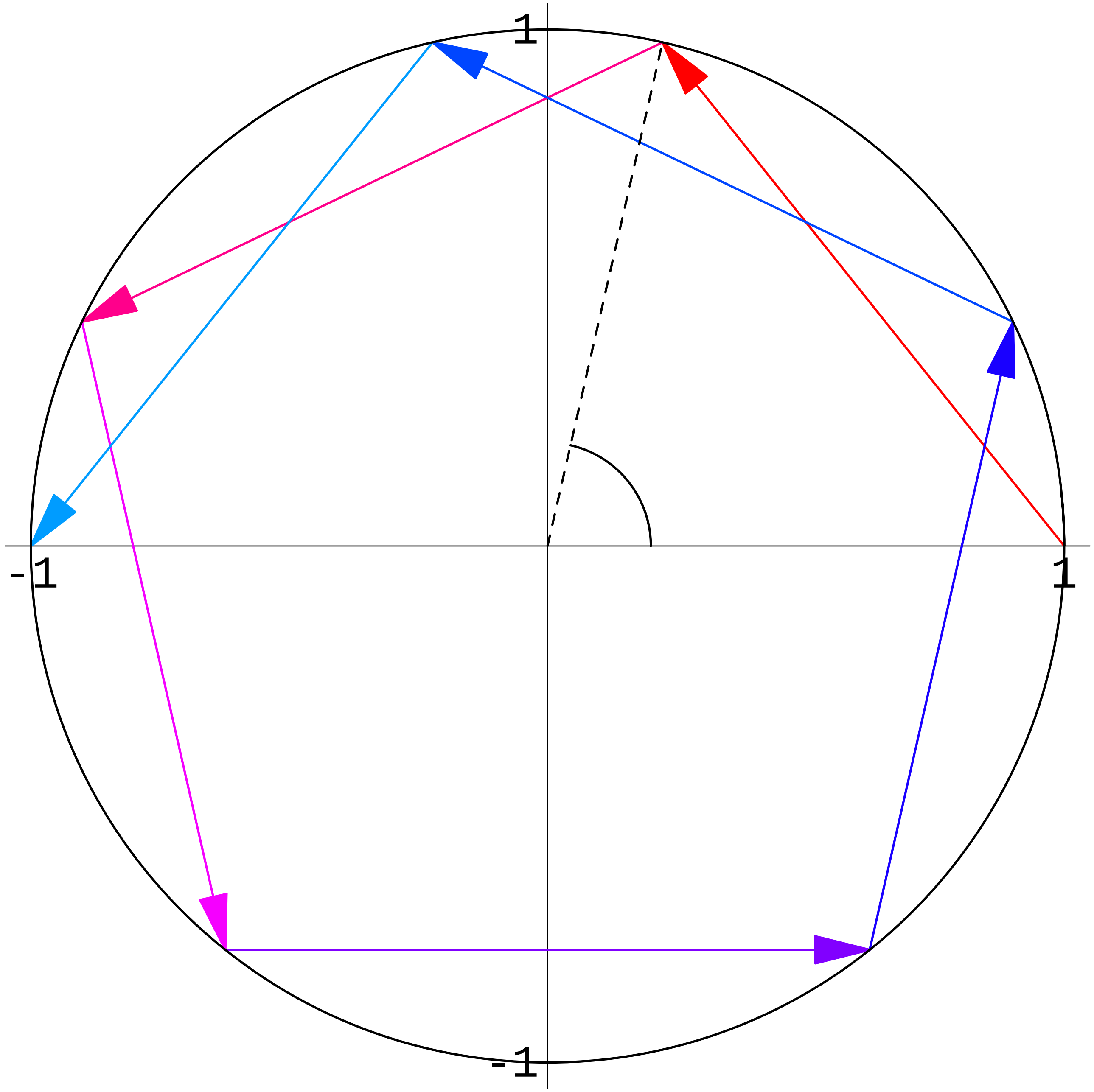
Dobbiamo proprio fermarci?



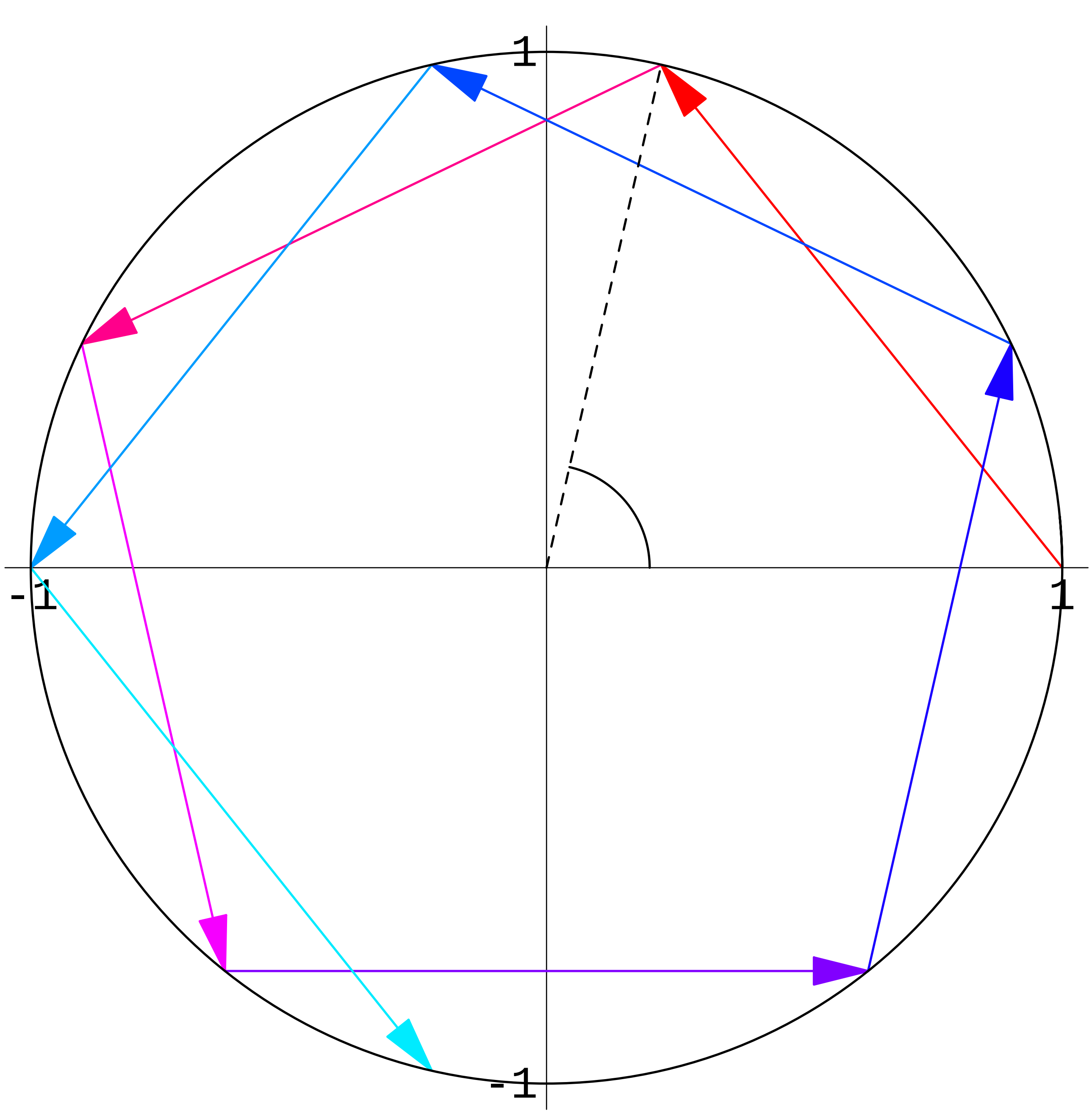
Dobbiamo proprio fermarci?



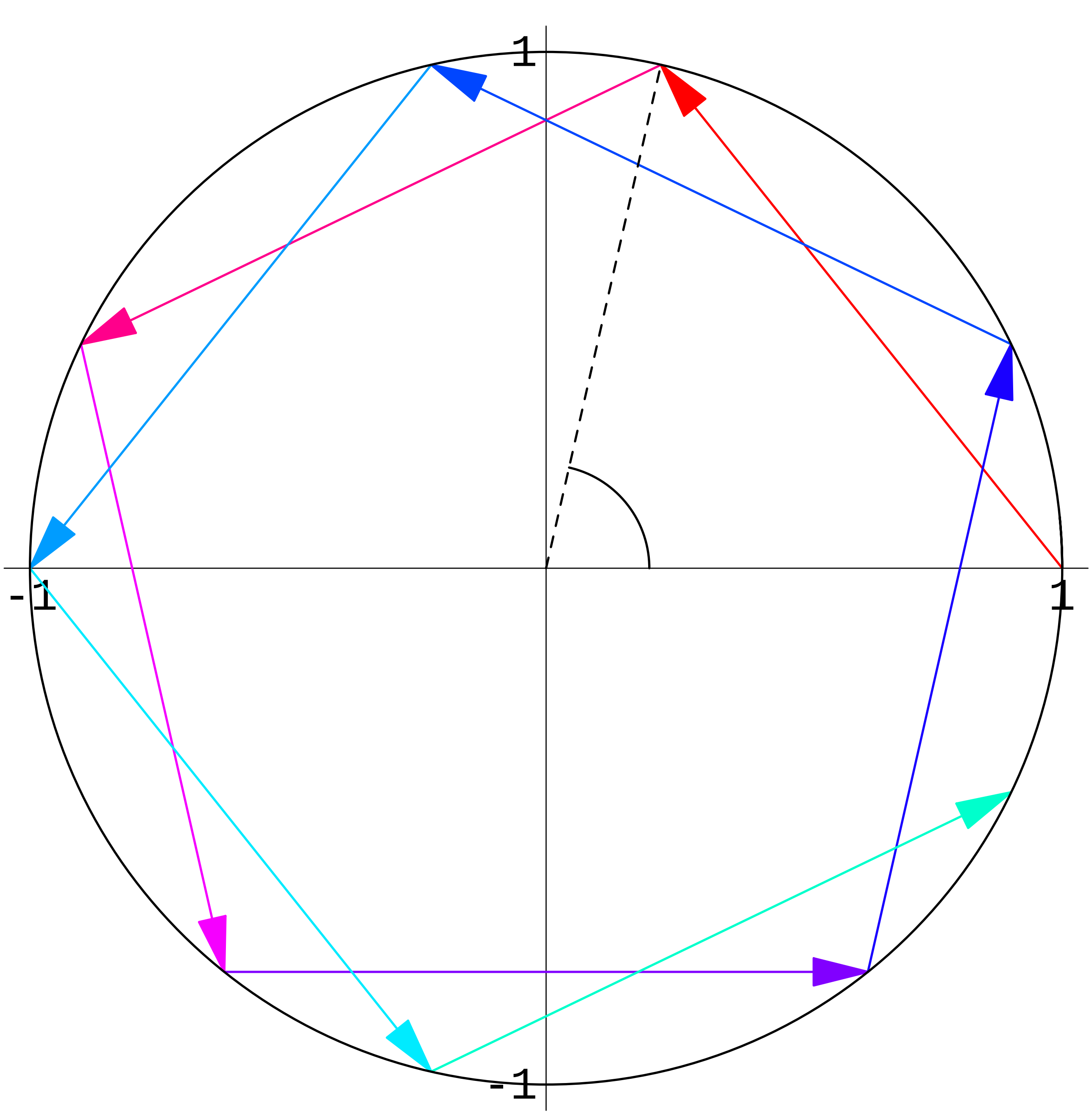
Dobbiamo proprio fermarci?



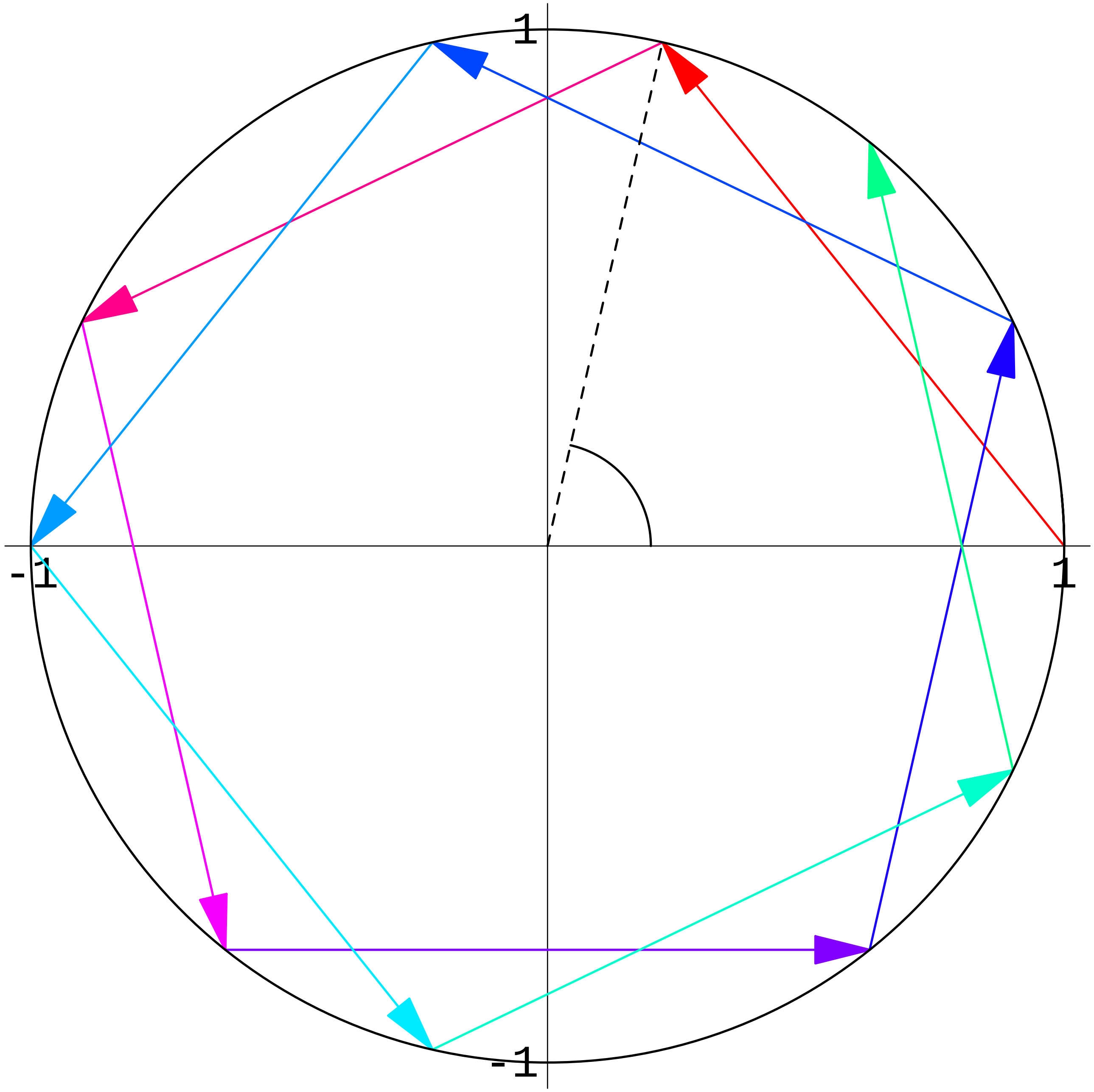
Dobbiamo proprio fermarci?



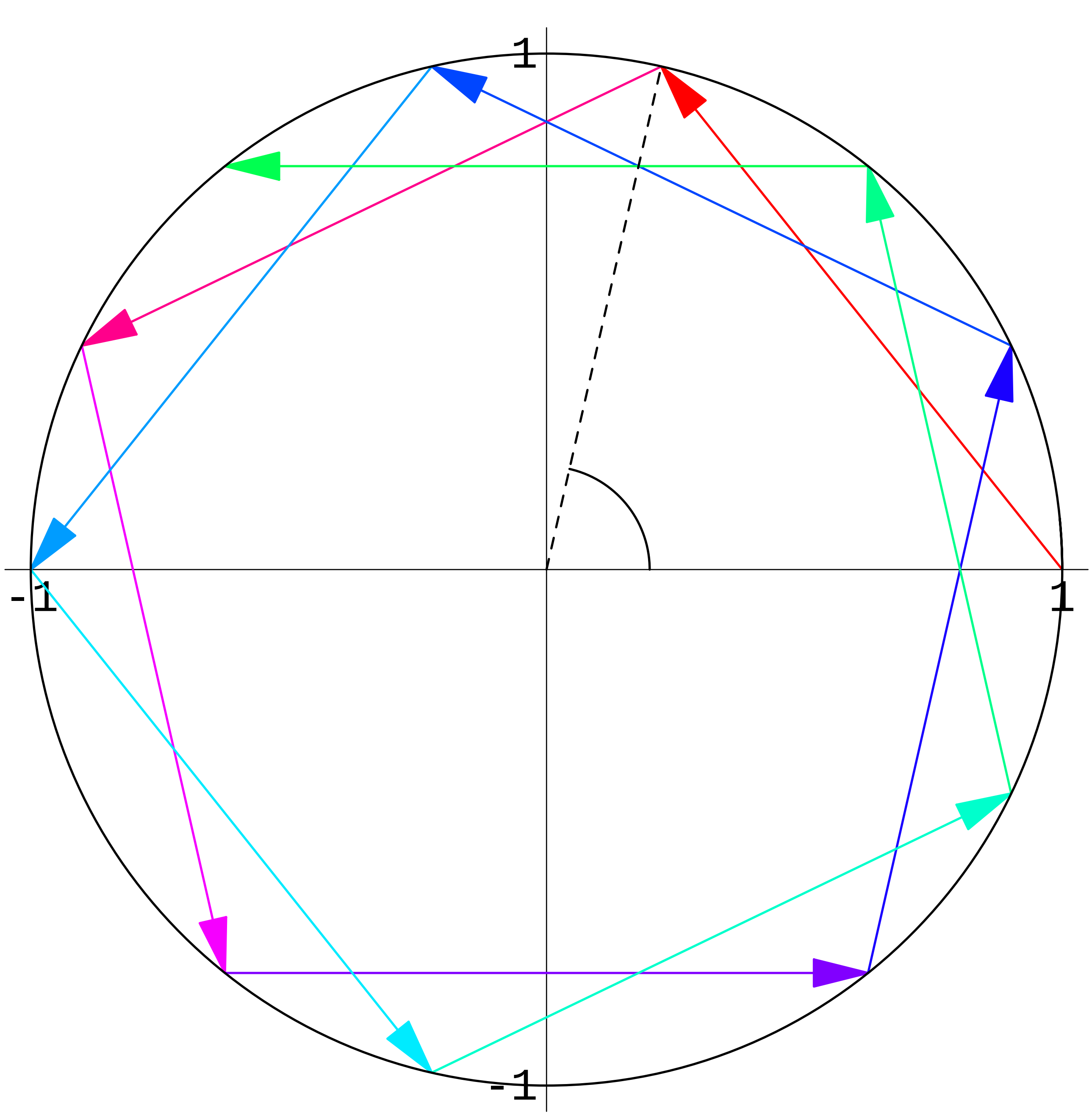
Dobbiamo proprio fermarci?



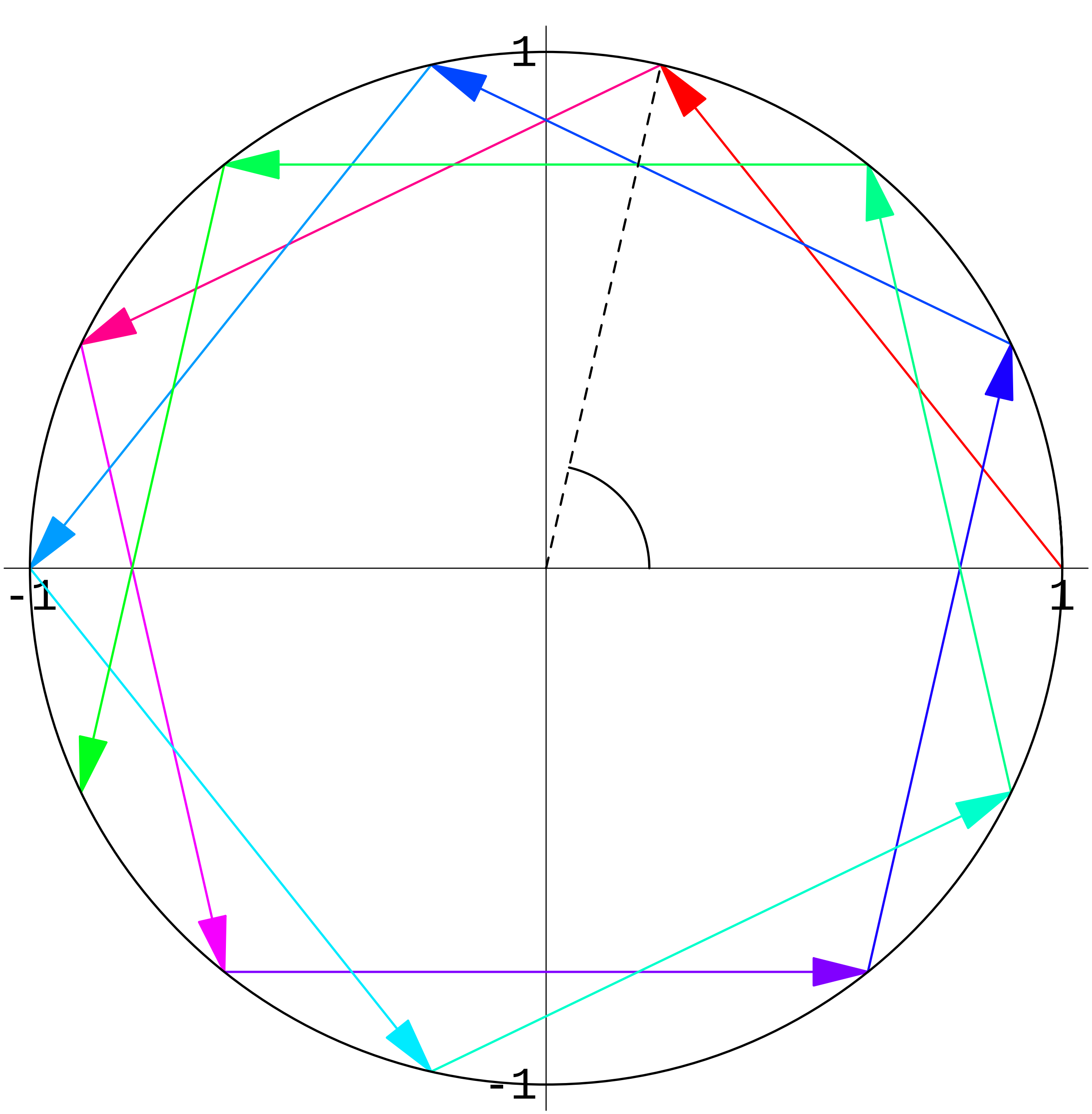
Dobbiamo proprio fermarci?



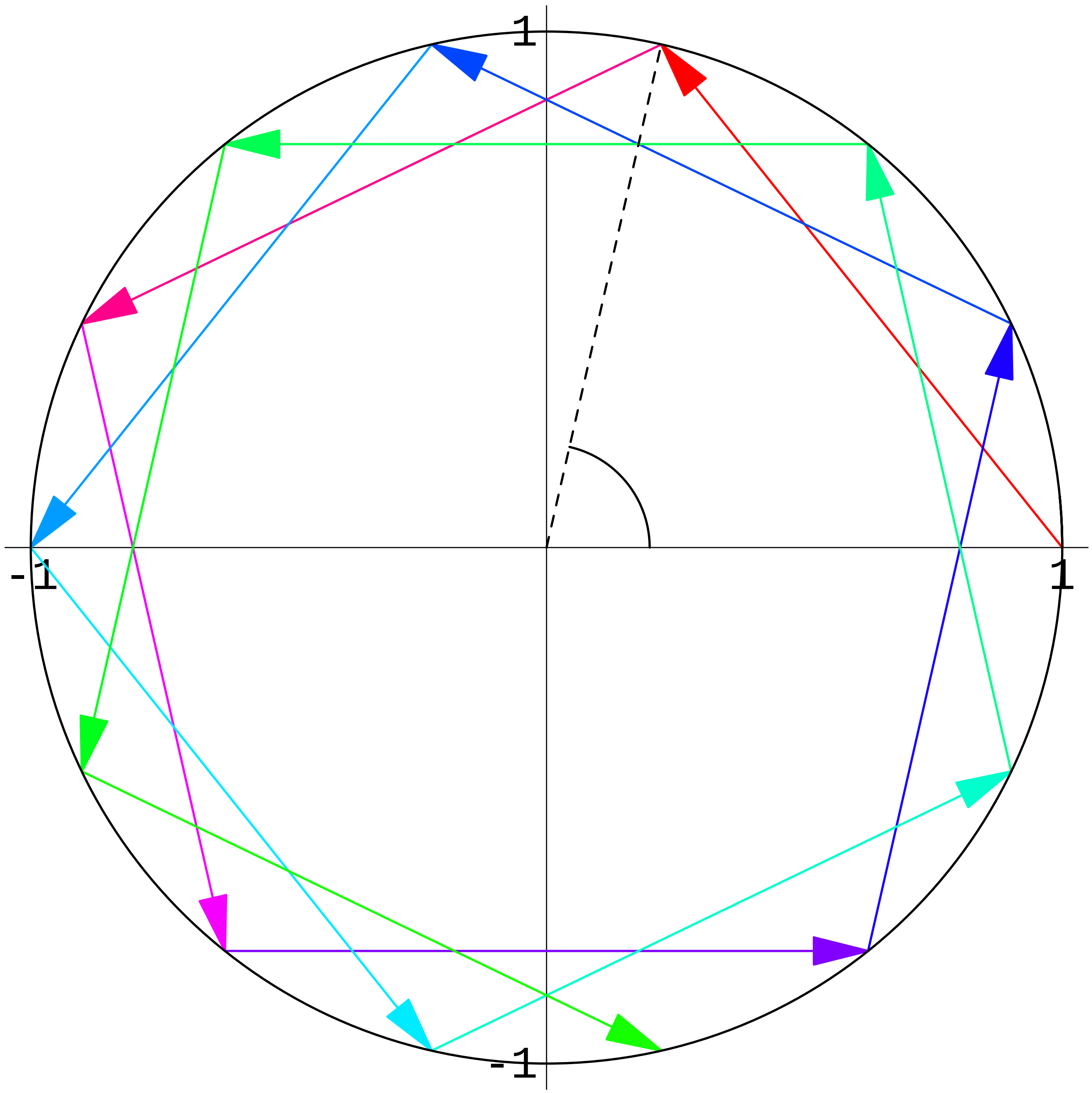
Dobbiamo proprio fermarci?



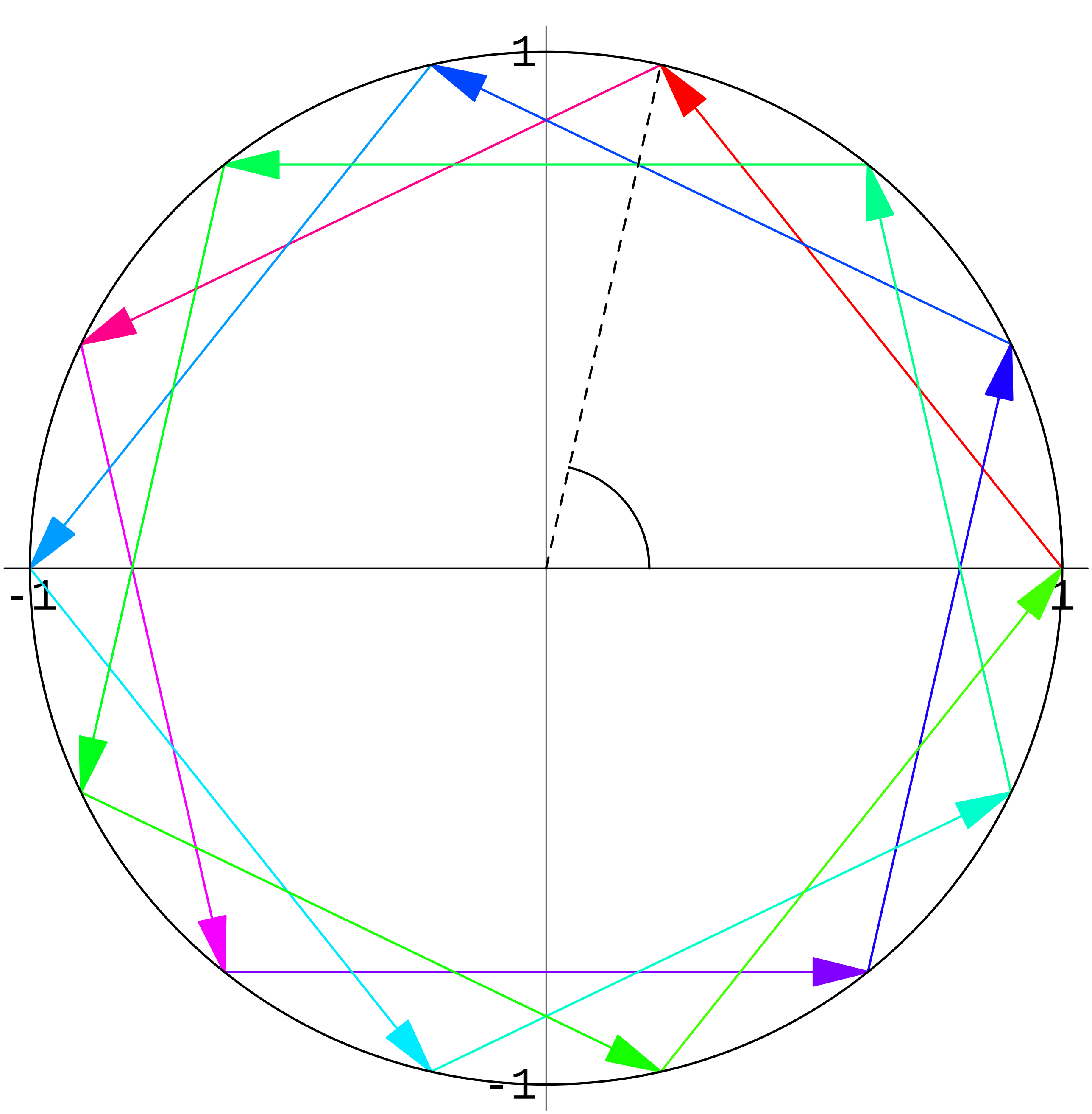
Dobbiamo proprio fermarci?



Dobbiamo proprio fermarci?



Dobbiamo proprio fermarci?



Dobbiamo proprio fermarci?

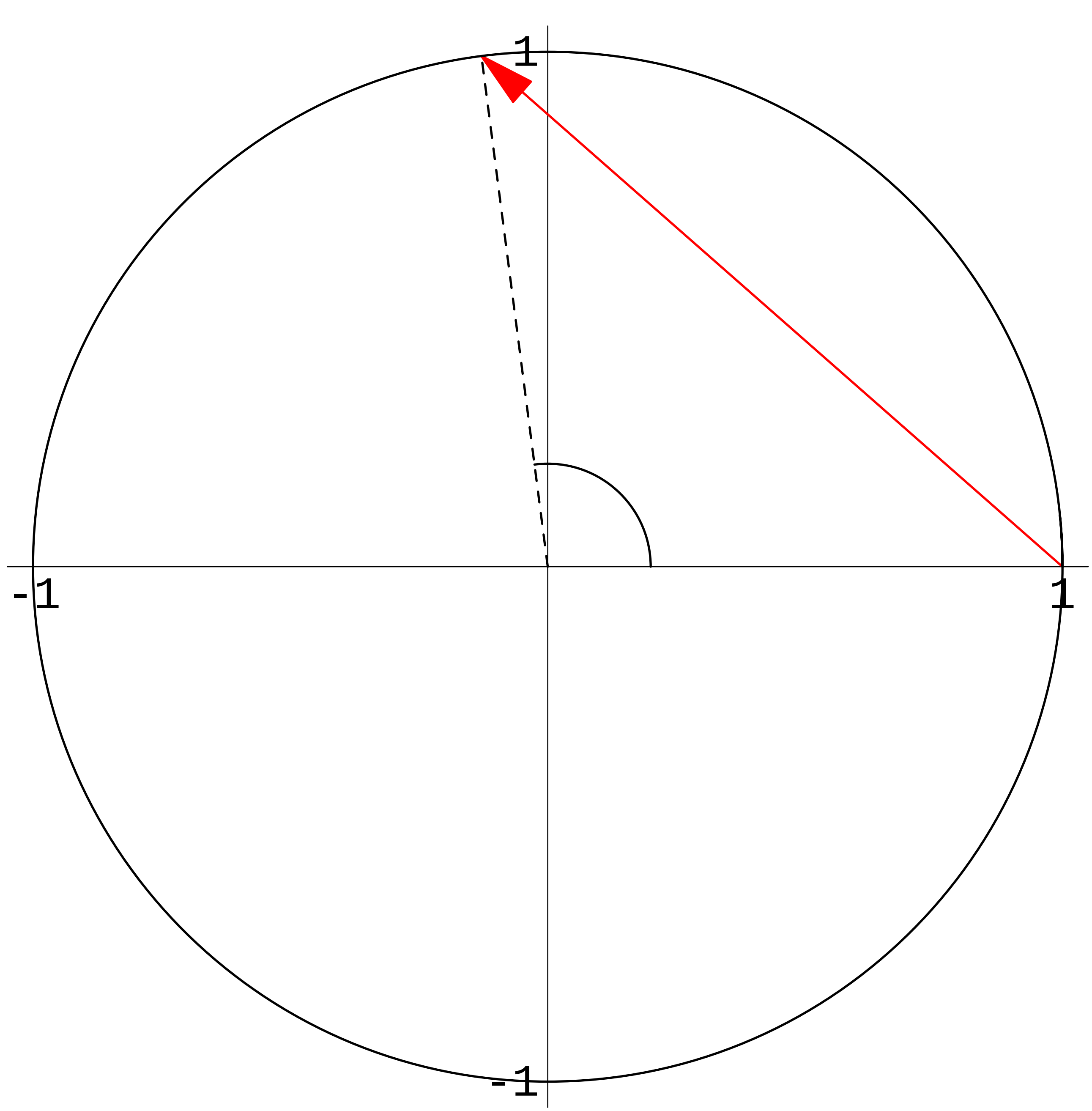
Quindi, a partire dall'equazione della spirale, possiamo ottenere l'angolo tra il primo e il secondo insetto. Questo non significa che ci troviamo nella stessa situazione del problema iniziale. Infatti abbiamo le seguenti possibilità:

- Se $\alpha = \alpha(\theta)$ divide 2π, allora siamo nella situazione iniziale.
- Se α divide un multiplo intero di 2π, allora siamo in un problema con un numero finito di insetti che si inseguono, ma questi non si seguono necessariamente nell'ordine, ma a salti costanti.

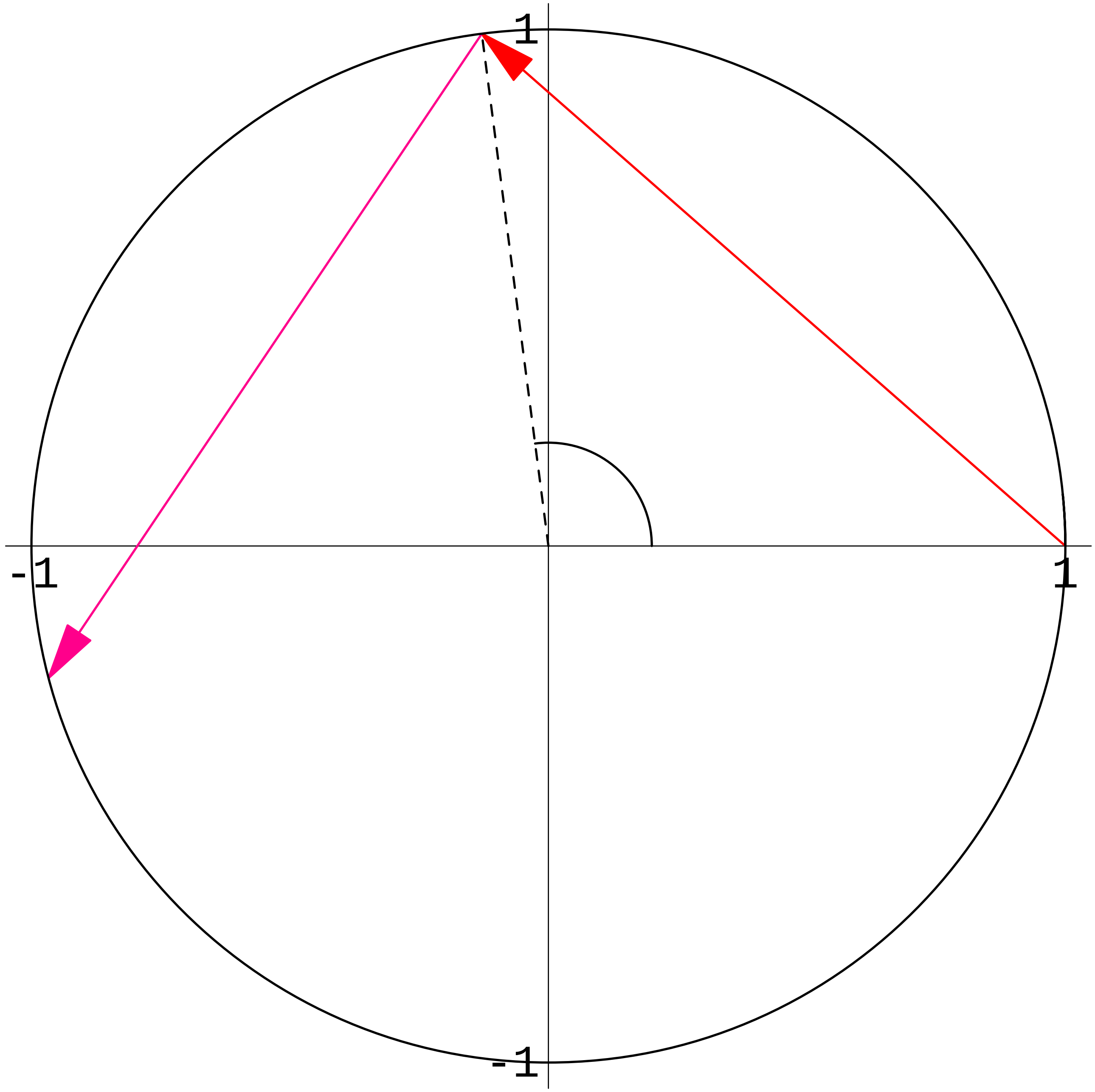
Quindi, a partire dall'equazione della spirale, possiamo ottenere l'angolo tra il primo e il secondo insetto. Questo non significa che ci troviamo nella stessa situazione del problema iniziale. Infatti abbiamo le seguenti possibilità:

- Se $\alpha = \alpha(\theta)$ divide 2π, allora siamo nella situazione iniziale.
- Se α divide un multiplo intero di 2π, allora siamo in un problema con un numero finito di insetti che si inseguono, ma questi non si seguono necessariamente nell'ordine, ma a salti costanti.
- Nel caso in cui α non divida un multiplo intero di 2π, ci sono infiniti insetti e quindi il problema non sarebbe più applicabile, almeno in teoria (nell'esempio, $\alpha = 1.7$ radianti):

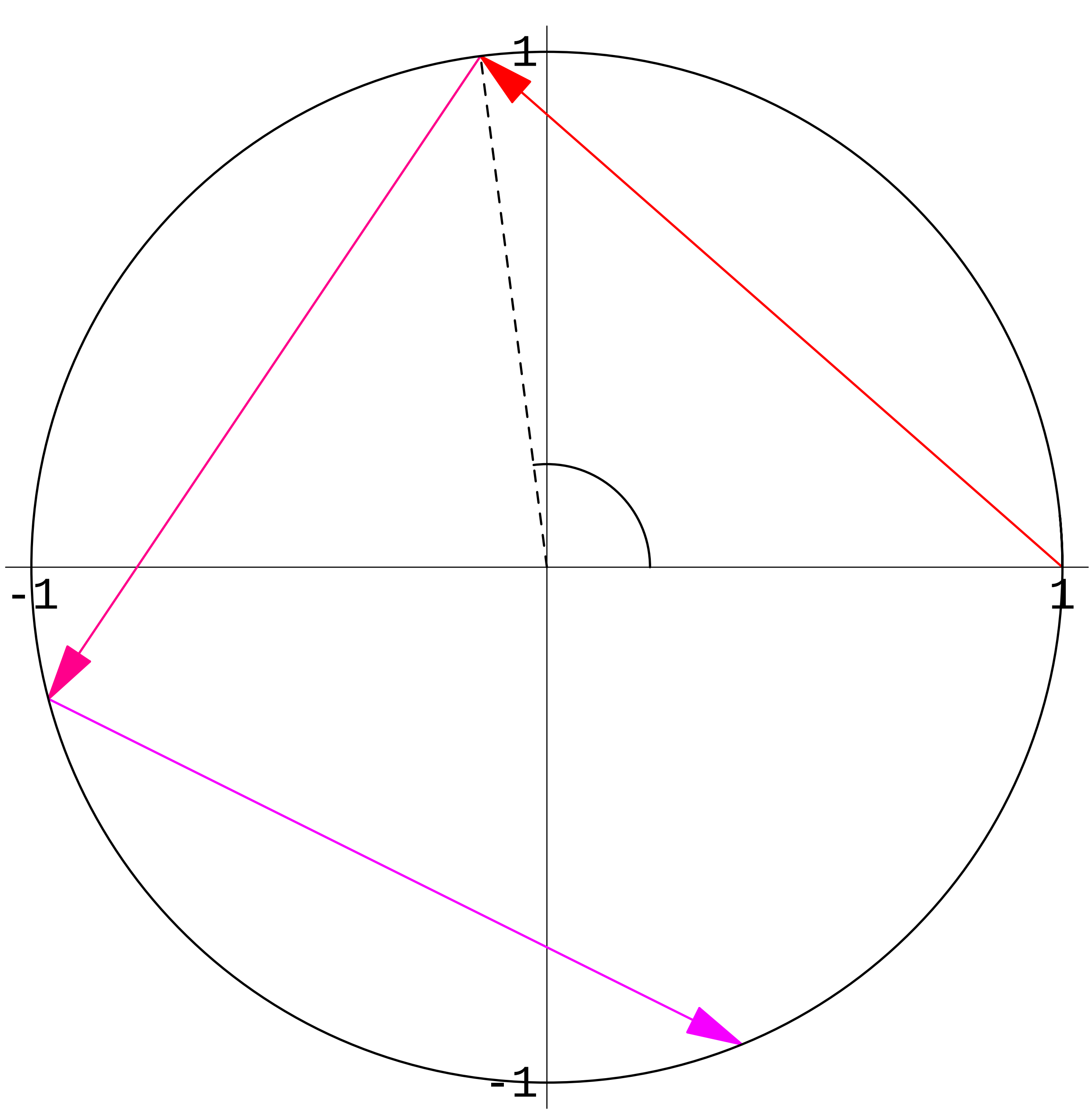
Dobbiamo proprio fermarci?



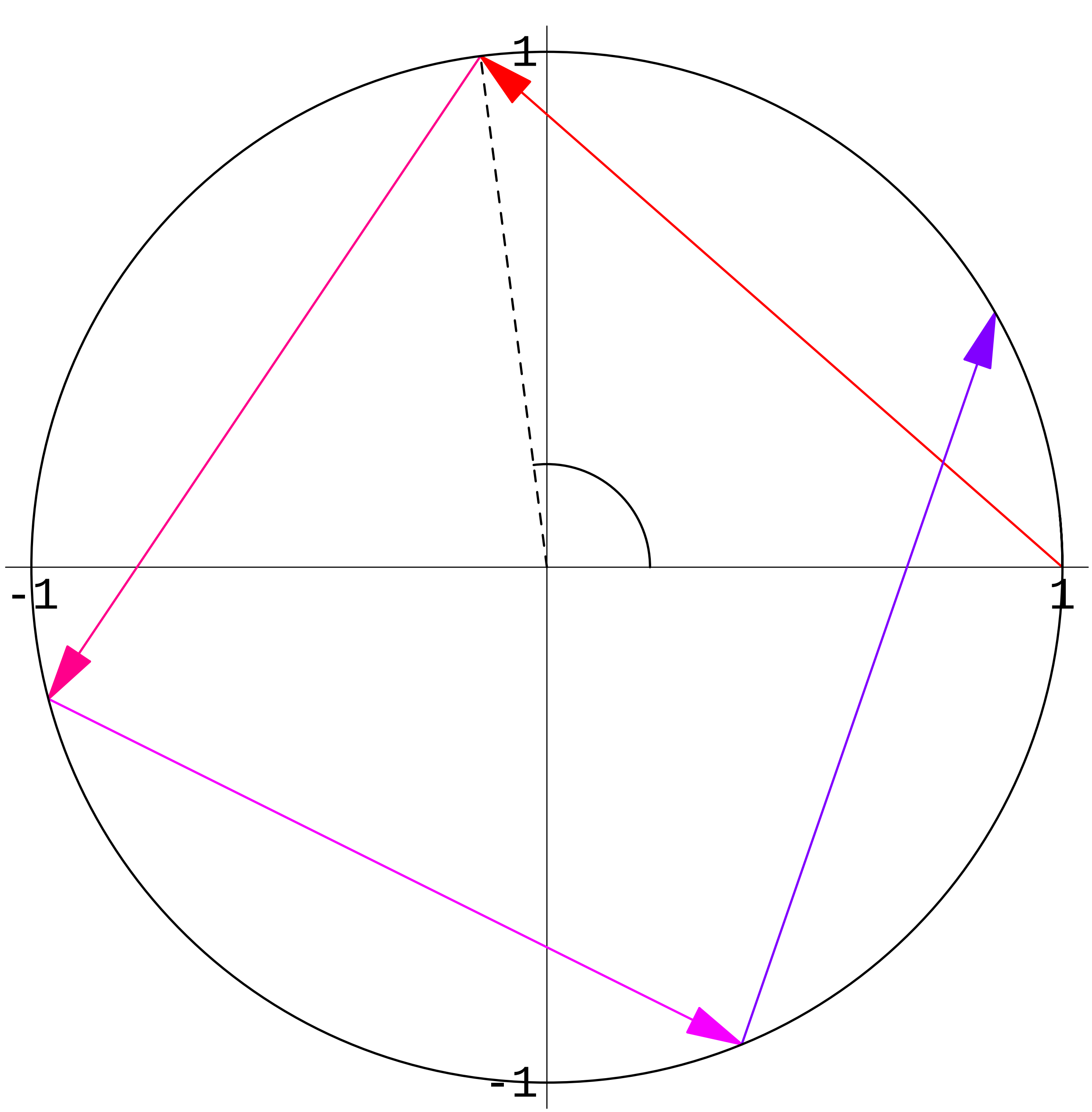
Dobbiamo proprio fermarci?



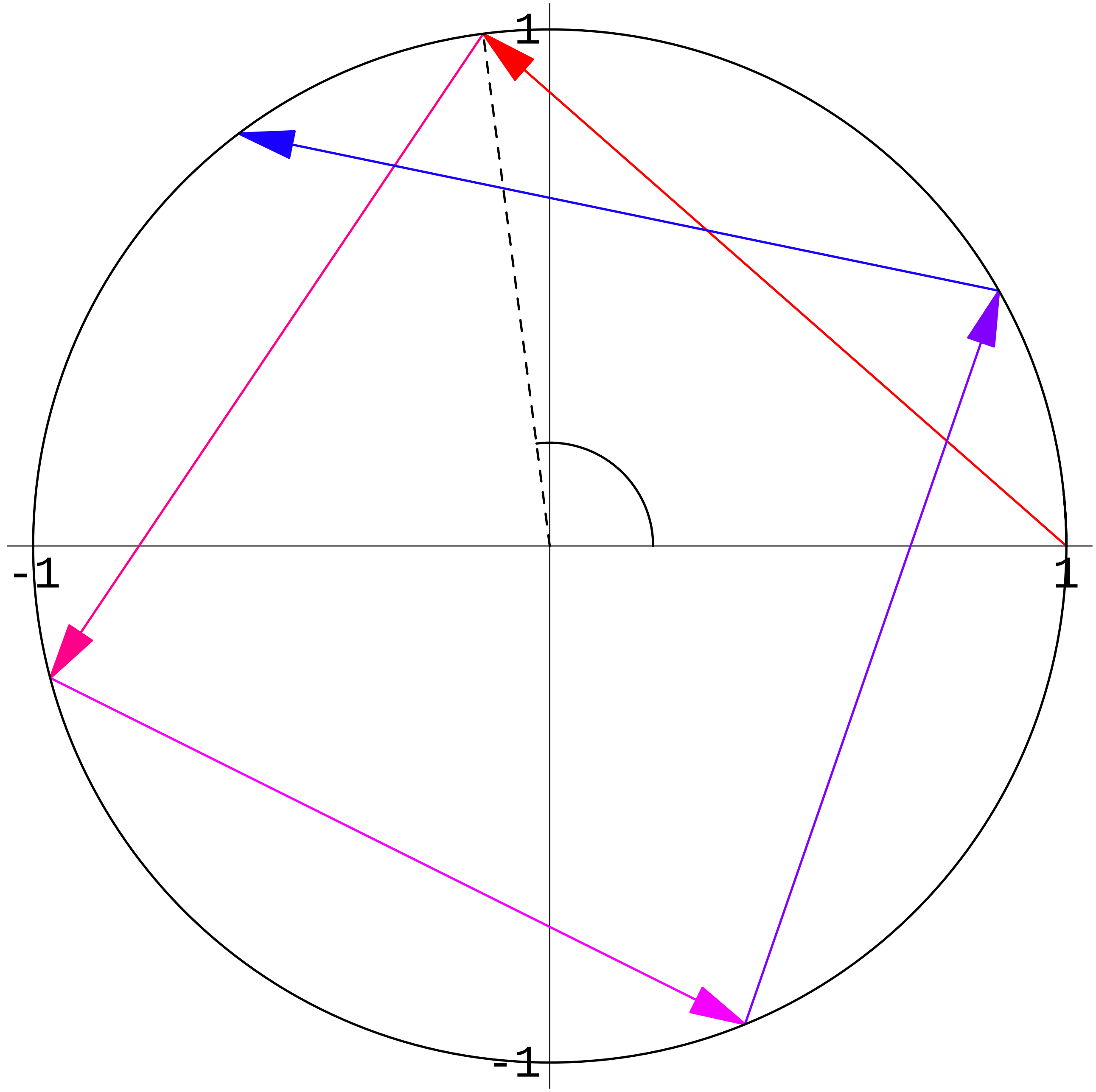
Dobbiamo proprio fermarci?



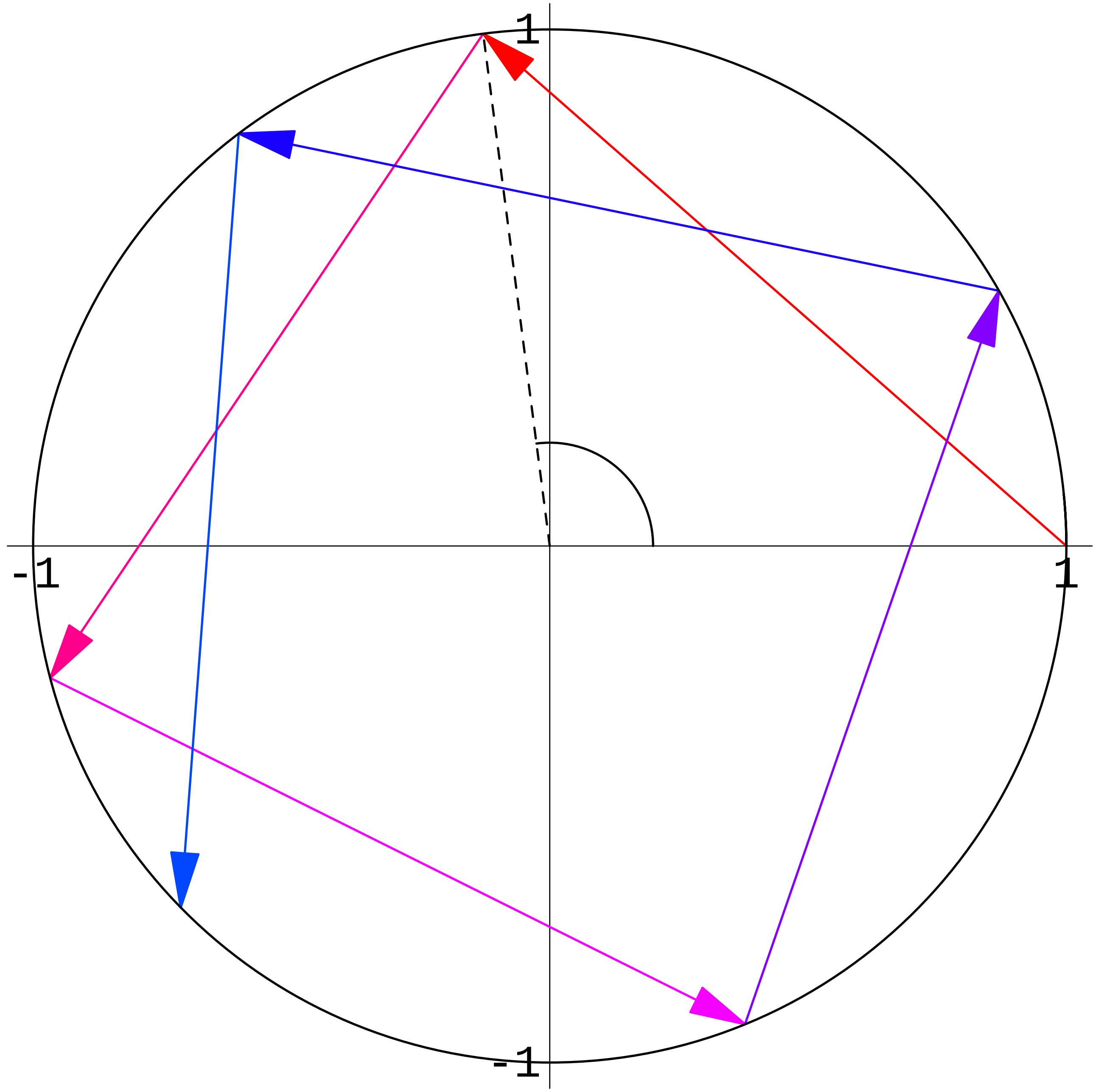
Dobbiamo proprio fermarci?



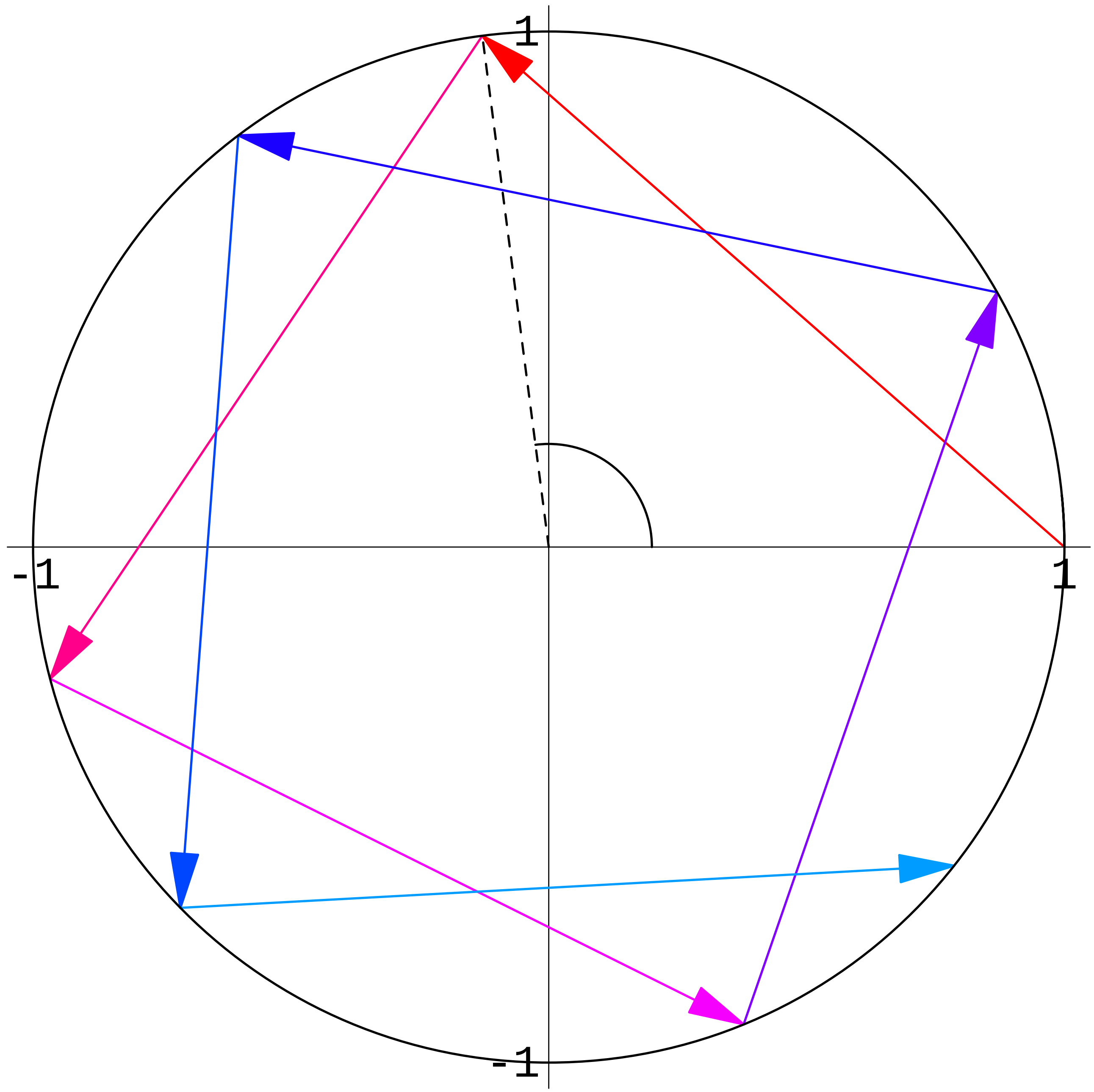
Dobbiamo proprio fermarci?



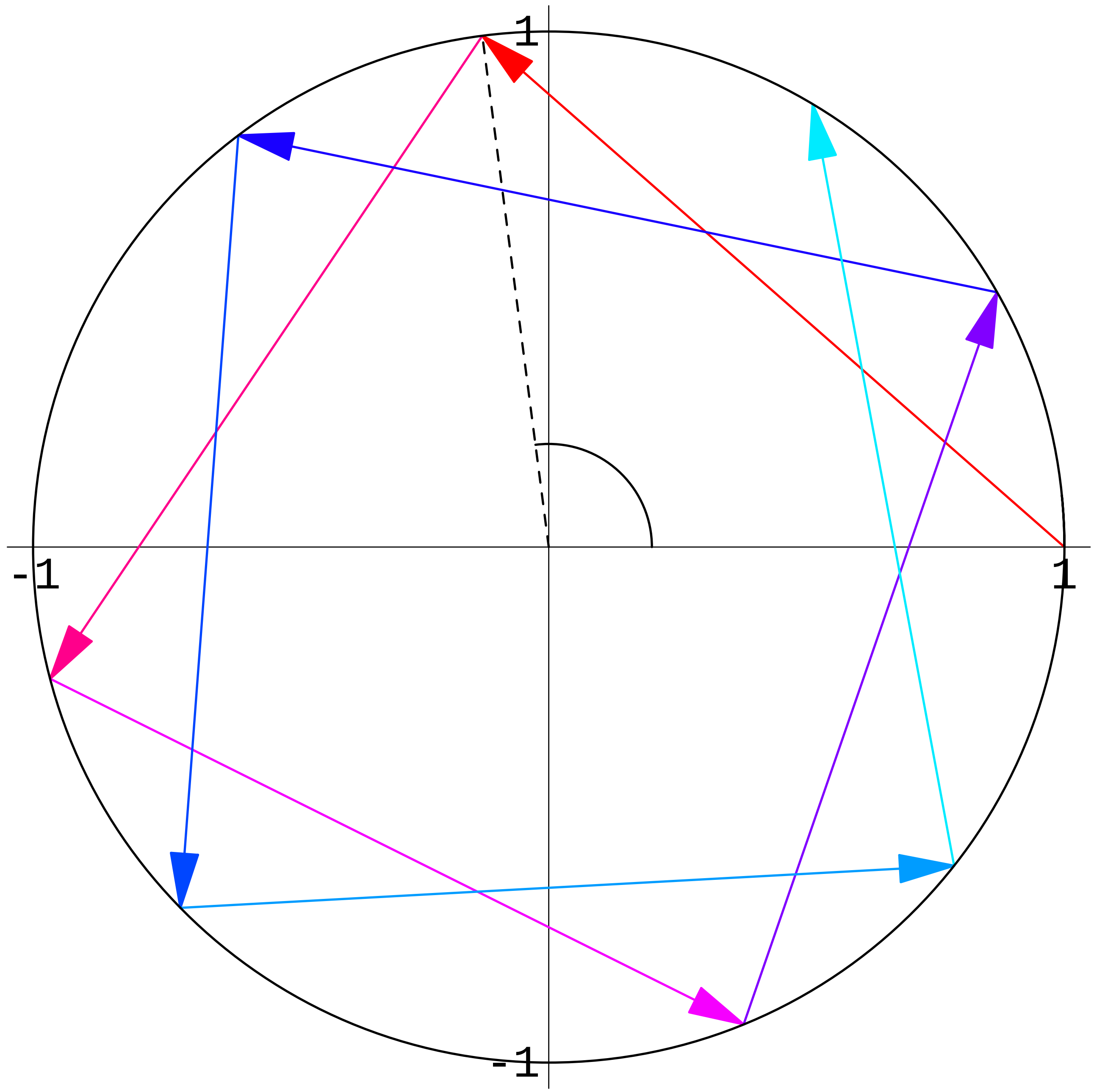
Dobbiamo proprio fermarci?



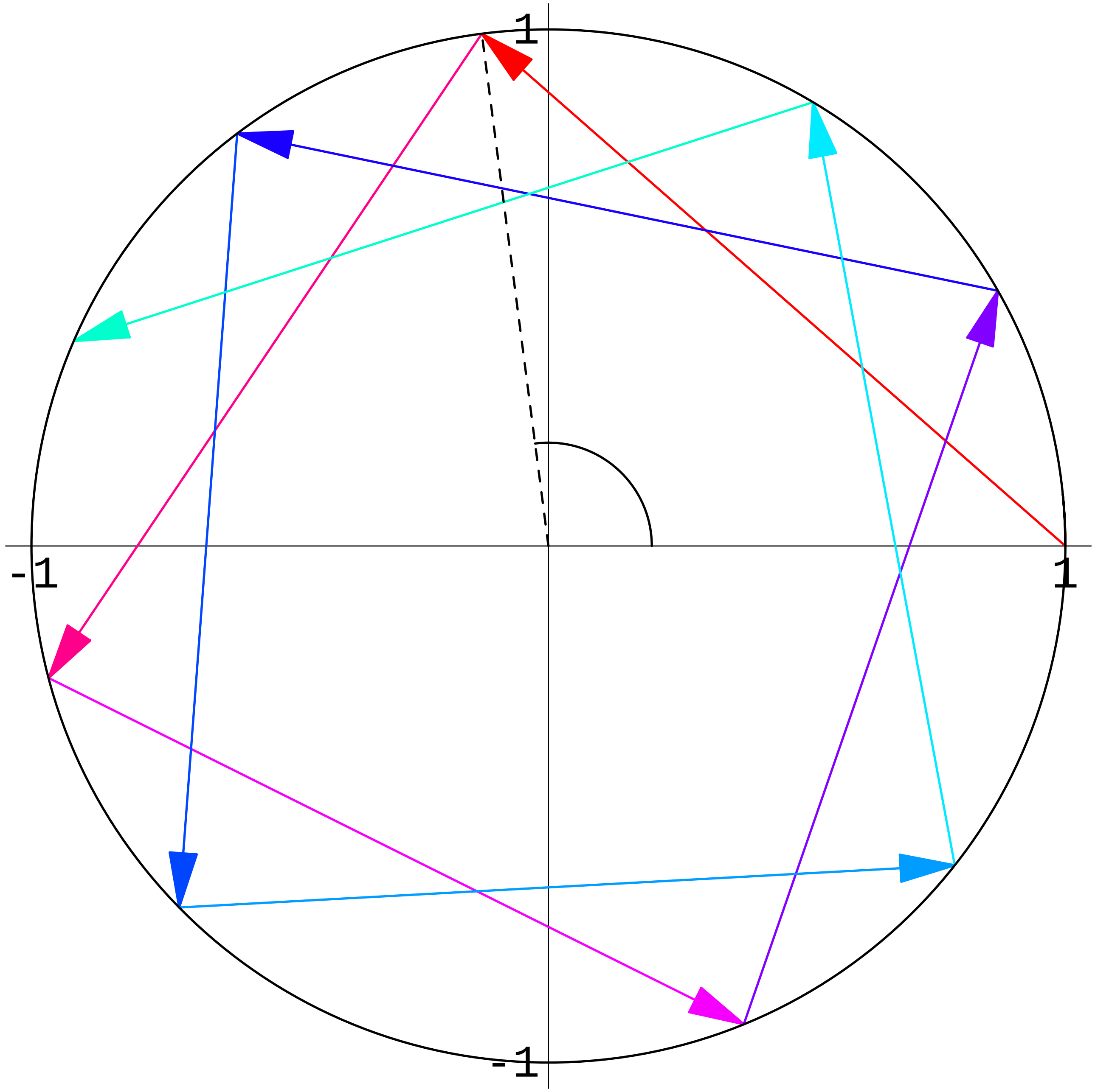
Dobbiamo proprio fermarci?



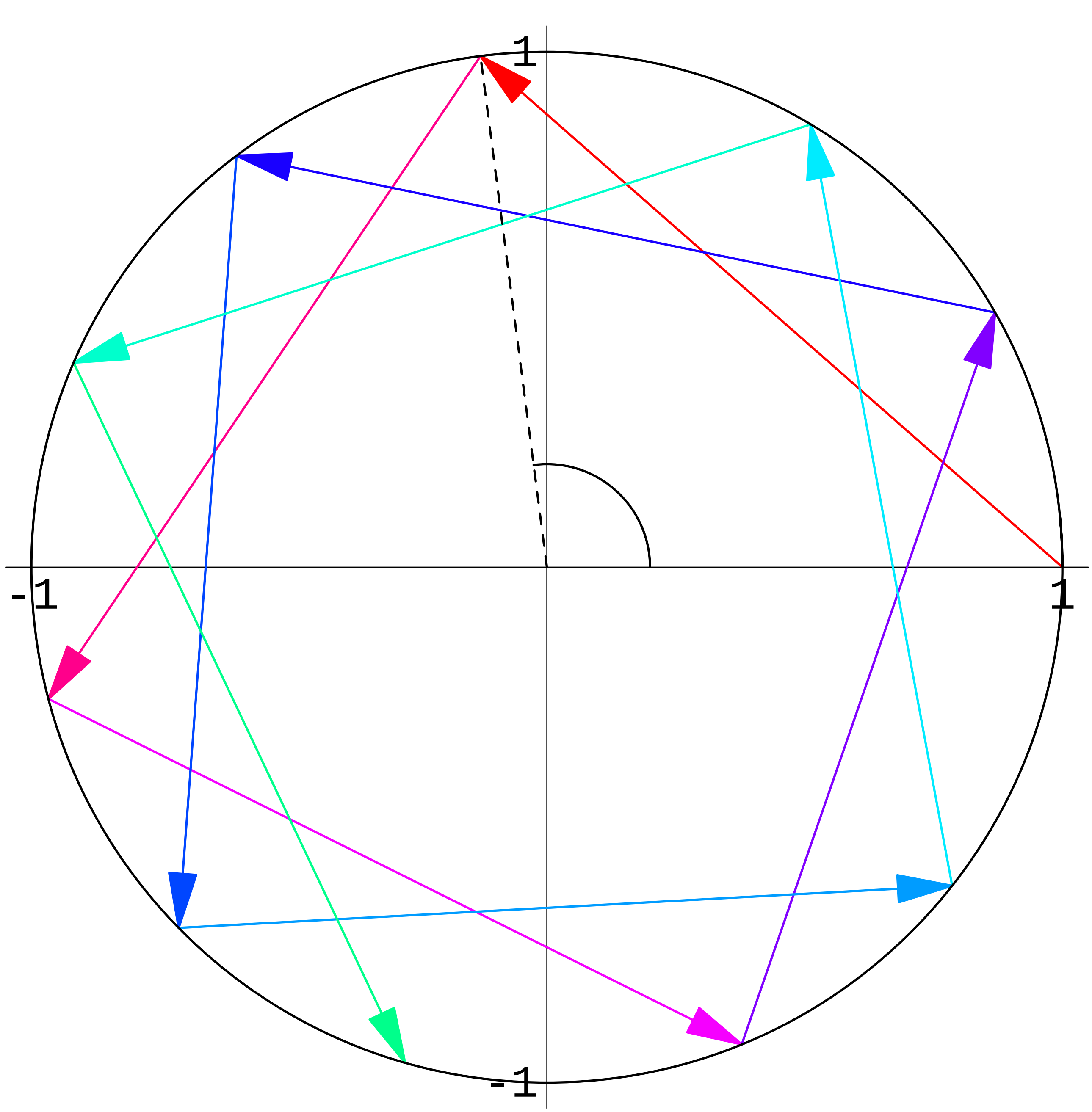
Dobbiamo proprio fermarci?



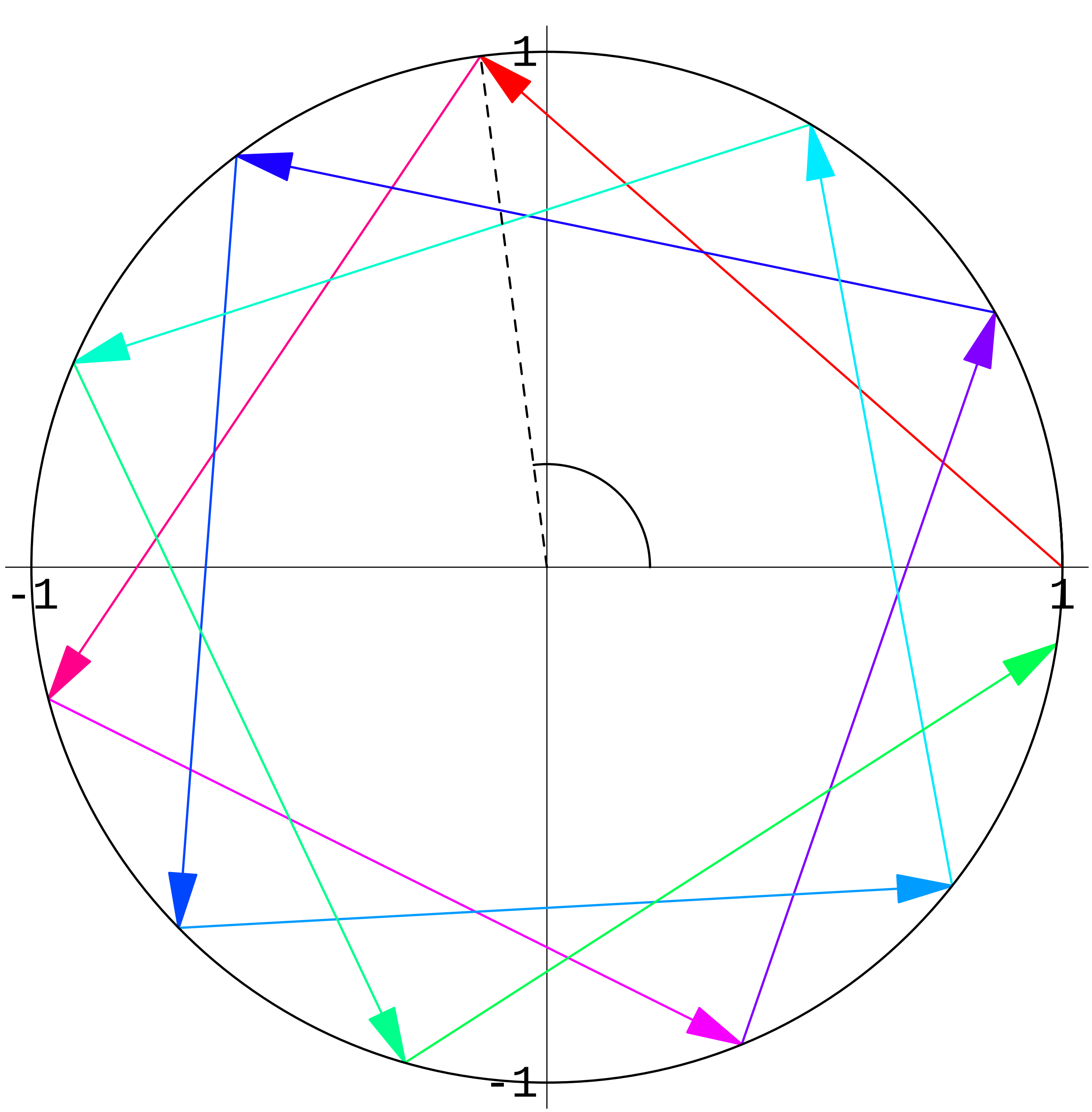
Dobbiamo proprio fermarci?



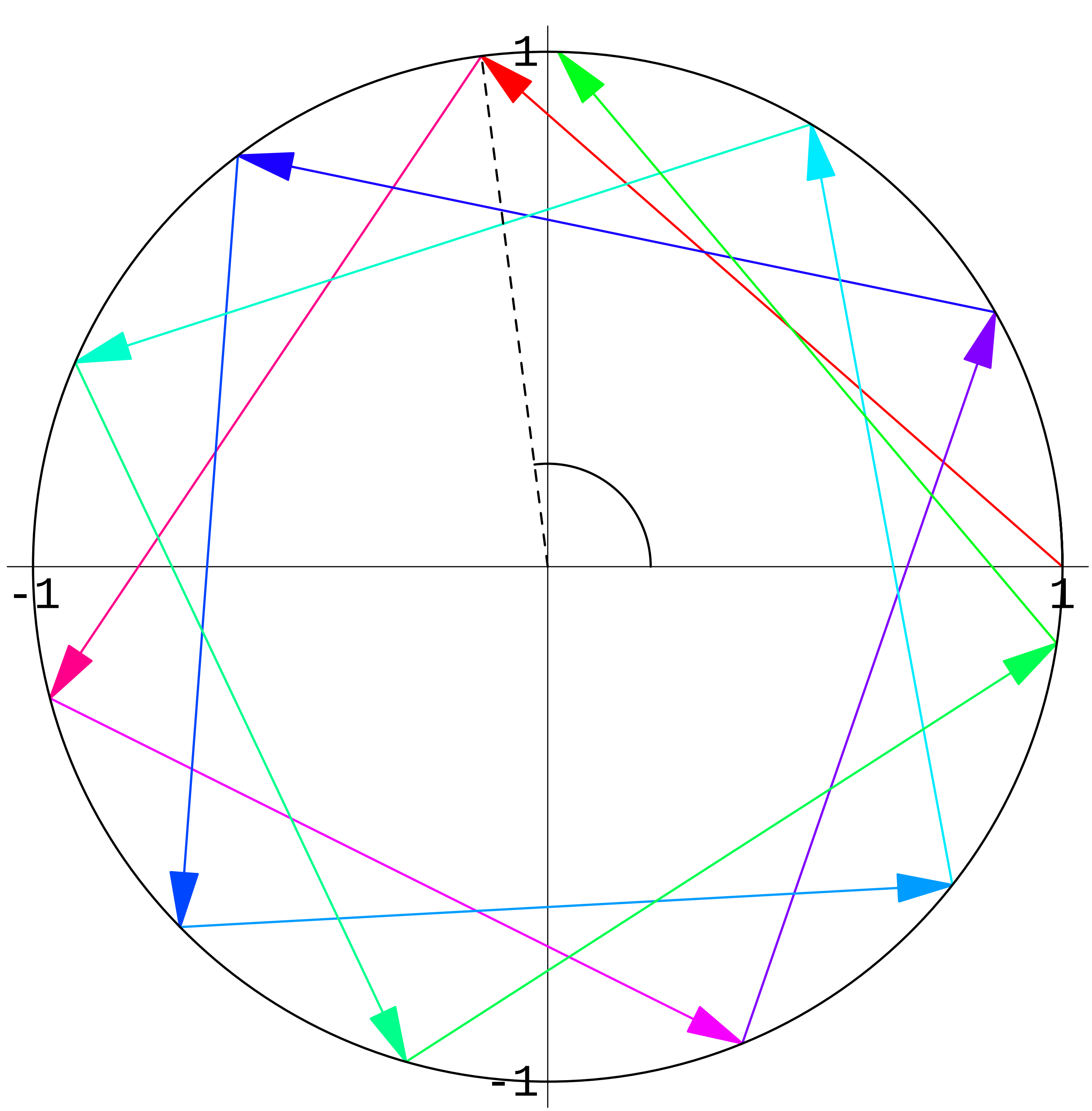
Dobbiamo proprio fermarci?



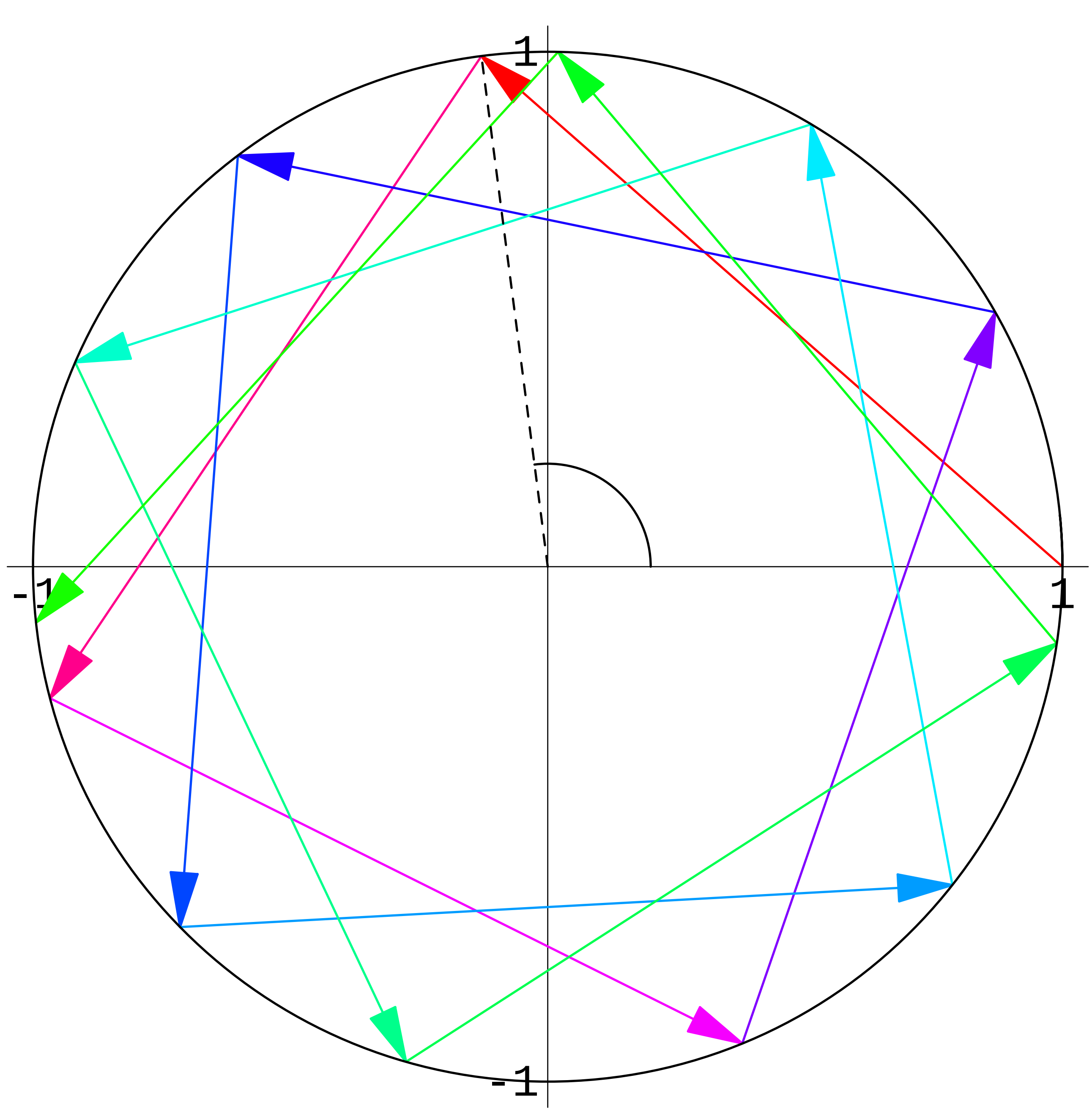
Dobbiamo proprio fermarci?



Dobbiamo proprio fermarci?



Dobbiamo proprio fermarci?



- **Tuttavia la soluzione dipendeva solamente dall'angolo formato tra le traiettorie di due insetti che si inseguono. Quindi non ci interessa la disposizione globale di tutti gli insetti.**

Dobbiamo proprio fermarci?

- **Tuttavia la soluzione dipendeva solamente dall'angolo formato tra le traiettorie di due insetti che si inseguono. Quindi non ci interessa la disposizione globale di tutti gli insetti.**
  - L'unico aspetto che ci interessa è che in ogni istante sia preservato l'angolo iniziale.

Dobbiamo proprio fermarci?

- **Tuttavia la soluzione dipendeva solamente dall'angolo formato tra le traiettorie di due insetti che si inseguono. Quindi non ci interessa la disposizione globale di tutti gli insetti.**
  - L'unico aspetto che ci interessa è che in ogni istante sia preservato l'angolo iniziale.
- **Ma questo è vero per simmetria. E quindi la lunghezza della spirale logaritmica 1.1 è**

$$\boxed{\sqrt{\frac{2}{1-\cos(2\,\mathrm{atan}\,\theta)}}}$$

Dobbiamo proprio fermarci?

- **Tuttavia la soluzione dipendeva solamente dall'angolo formato tra le traiettorie di due insetti che si inseguono. Quindi non ci interessa la disposizione globale di tutti gli insetti.**
  - L'unico aspetto che ci interessa è che in ogni istante sia preservato l'angolo iniziale.
- **Ma questo è vero per simmetria. E quindi la lunghezza della spirale logaritmica 1.1 è**

$$\sqrt{\frac{2}{1-\cos(2\,\mathrm{atan}\,\theta)}}$$

- **ovvero, usando le formule trigonometriche note:**

$$\sqrt{\frac{2}{1-\frac{1-\tan^2\mathrm{atan}\,\theta}{1+\tan^2\mathrm{atan}\,\theta}}}$$

Dobbiamo proprio fermarci?

- **Tuttavia la soluzione dipendeva solamente dall'angolo formato tra le traiettorie di due insetti che si inseguono. Quindi non ci interessa la disposizione globale di tutti gli insetti.**
  - L'unico aspetto che ci interessa è che in ogni istante sia preservato l'angolo iniziale.
- **Ma questo è vero per simmetria. E quindi la lunghezza della spirale logaritmica 1.1 è**

$$\sqrt{\frac{2}{1-\cos(2\,\mathrm{atan}\,\theta)}}$$

- **ovvero, usando le formule trigonometriche note:**

$$\sqrt{\frac{2}{1-\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}}}$$

Dobbiamo proprio fermarci?

- **Tuttavia la soluzione dipendeva solamente dall'angolo formato tra le traiettorie di due insetti che si inseguono. Quindi non ci interessa la disposizione globale di tutti gli insetti.**
  - L'unico aspetto che ci interessa è che in ogni istante sia preservato l'angolo iniziale.
- **Ma questo è vero per simmetria. E quindi la lunghezza della spirale logaritmica 1.1 è**

$$\boxed{\sqrt{\frac{2}{1-\cos(2\,\mathrm{atan}\,\theta)}}}$$

- **ovvero, usando le formule trigonometriche note:**

$$\boxed{\sqrt{\frac{2(1+\theta^2)}{1+\theta^2-(1-\theta^2)}}}$$

Dobbiamo proprio fermarci?

- **Tuttavia la soluzione dipendeva solamente dall'angolo formato tra le traiettorie di due insetti che si inseguono. Quindi non ci interessa la disposizione globale di tutti gli insetti.**
  - L'unico aspetto che ci interessa è che in ogni istante sia preservato l'angolo iniziale.
- **Ma questo è vero per simmetria. E quindi la lunghezza della spirale logaritmica 1.1 è**

$$\boxed{\sqrt{\frac{2}{1-\cos(2\,\mathrm{atan}\,\theta)}}}$$

- **ovvero, usando le formule trigonometriche note:**

$$\boxed{\sqrt{\frac{2(1+\theta^2)}{1+\theta^2-1+\theta^2}}}$$

Dobbiamo proprio fermarci?

- **Tuttavia la soluzione dipendeva solamente dall'angolo formato tra le traiettorie di due insetti che si inseguono. Quindi non ci interessa la disposizione globale di tutti gli insetti.**
  - L'unico aspetto che ci interessa è che in ogni istante sia preservato l'angolo iniziale.
- **Ma questo è vero per simmetria. E quindi la lunghezza della spirale logaritmica 1.1 è**

$$\boxed{\sqrt{\frac{2}{1-\cos(2\,\mathrm{atan}\,\theta)}}}$$

- **ovvero, usando le formule trigonometriche note:**

$$\boxed{\sqrt{\frac{2(1+\theta^2)}{2\theta^2}}}$$

- **Tuttavia la soluzione dipendeva solamente dall'angolo formato tra le traiettorie di due insetti che si inseguono. Quindi non ci interessa la disposizione globale di tutti gli insetti.**
  - L'unico aspetto che ci interessa è che in ogni istante sia preservato l'angolo iniziale.
- **Ma questo è vero per simmetria. E quindi la lunghezza della spirale logaritmica 1.1 è**

$$\sqrt{\frac{2}{1-\cos(2\,\mathrm{atan}\,\theta)}}$$

- **ovvero, usando le formule trigonometriche note:**

$$\sqrt{\frac{1+\theta^2}{\theta^2}}$$

Dobbiamo proprio fermarci?

- **Tuttavia la soluzione dipendeva solamente dall'angolo formato tra le traiettorie di due insetti che si inseguono. Quindi non ci interessa la disposizione globale di tutti gli insetti.**
  - L'unico aspetto che ci interessa è che in ogni istante sia preservato l'angolo iniziale.
- **Ma questo è vero per simmetria. E quindi la lunghezza della spirale logaritmica 1.1 è**

$$\sqrt{\frac{2}{1-\cos(2\,\mathrm{atan}\,\theta)}}$$

- **ovvero, usando le formule trigonometriche note:**

$$\frac{1}{\theta}\sqrt{1+\theta^2}$$

Cap. 2

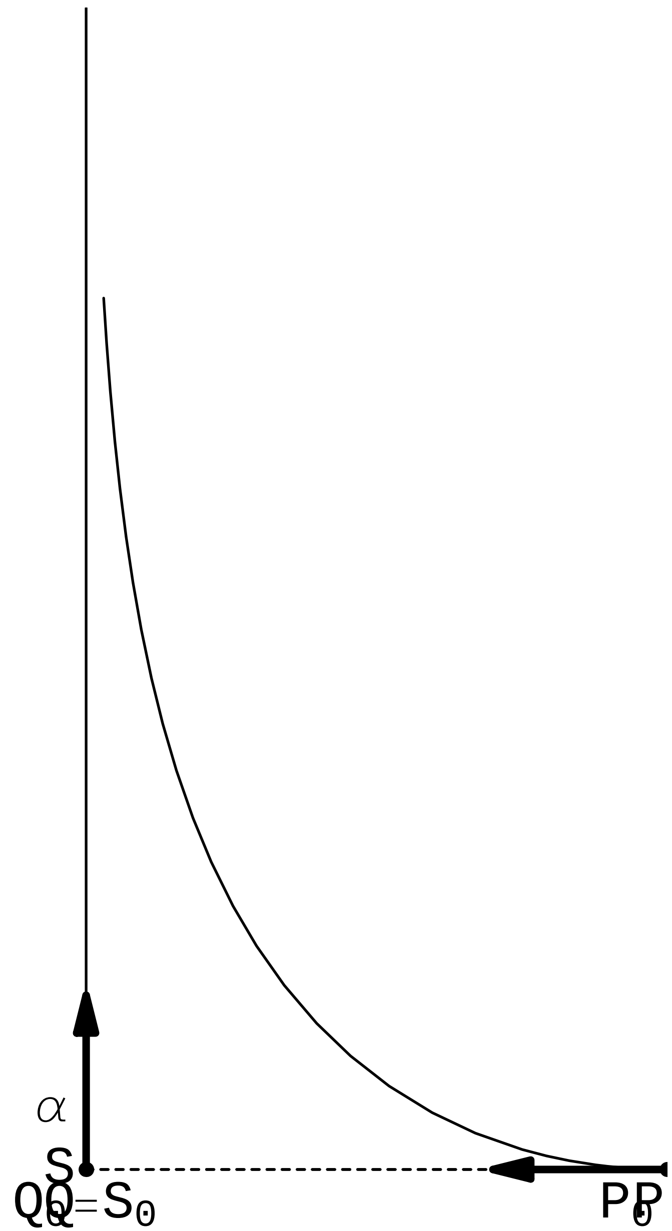
Il problema di Hugo Steinhaus

Il problema delle navi

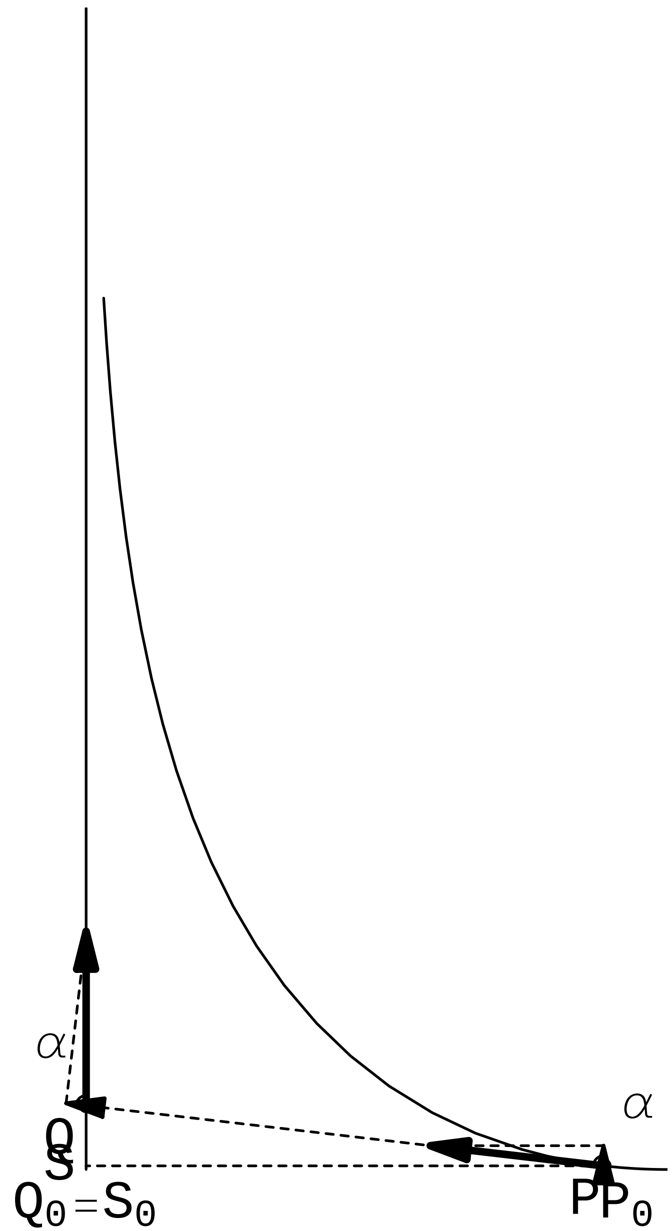
La nave P vede la nave Q che naviga con rotta perpendicolare a PQ e che anche in seguito continua a navigare nella stessa direzione. P insegue Q puntando costantemente su di essa; entrambe le navi hanno in ogni momento la stessa velocità (ma essa può variare nel tempo).

La nave P vede la nave Q che naviga con rotta perpendicolare a PQ e che anche in seguito continua a navigare nella stessa direzione. P insegue Q puntando costantemente su di essa; entrambe le navi hanno in ogni momento la stessa velocità (ma essa può variare nel tempo).
È evidente che P descrive una linea curva e che, se l'inseguimento dura a lungo, la scia della nave inseguitrice si porta su quella della nave inseguita.

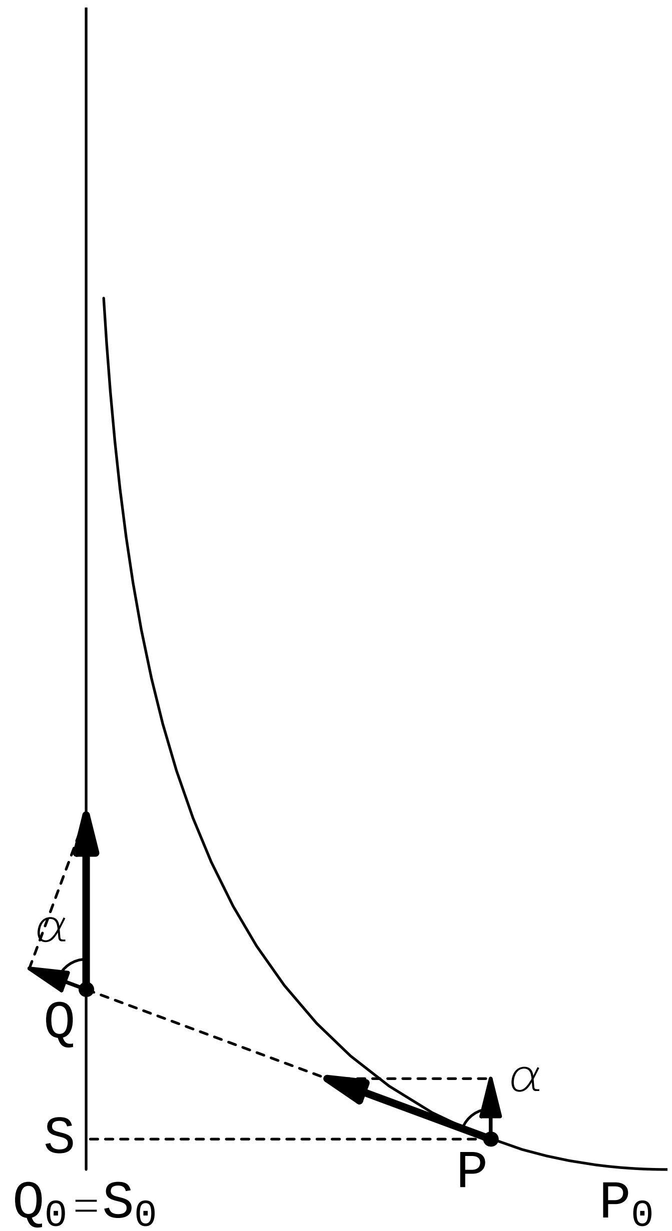
La nave P vede la nave Q che naviga con rotta perpendicolare a PQ e che anche in seguito continua a navigare nella stessa direzione. P insegue Q puntando costantemente su di essa; entrambe le navi hanno in ogni momento la stessa velocità (ma essa può variare nel tempo).
È evidente che P descrive una linea curva e che, se l'inseguimento dura a lungo, la scia della nave inseguitrice si porta su quella della nave inseguita.
Qual è a questo punto la distanza PQ, se all'inizio era uguale a 10 miglia nautiche?


α
S
Q
Q=S
0
P
P
0

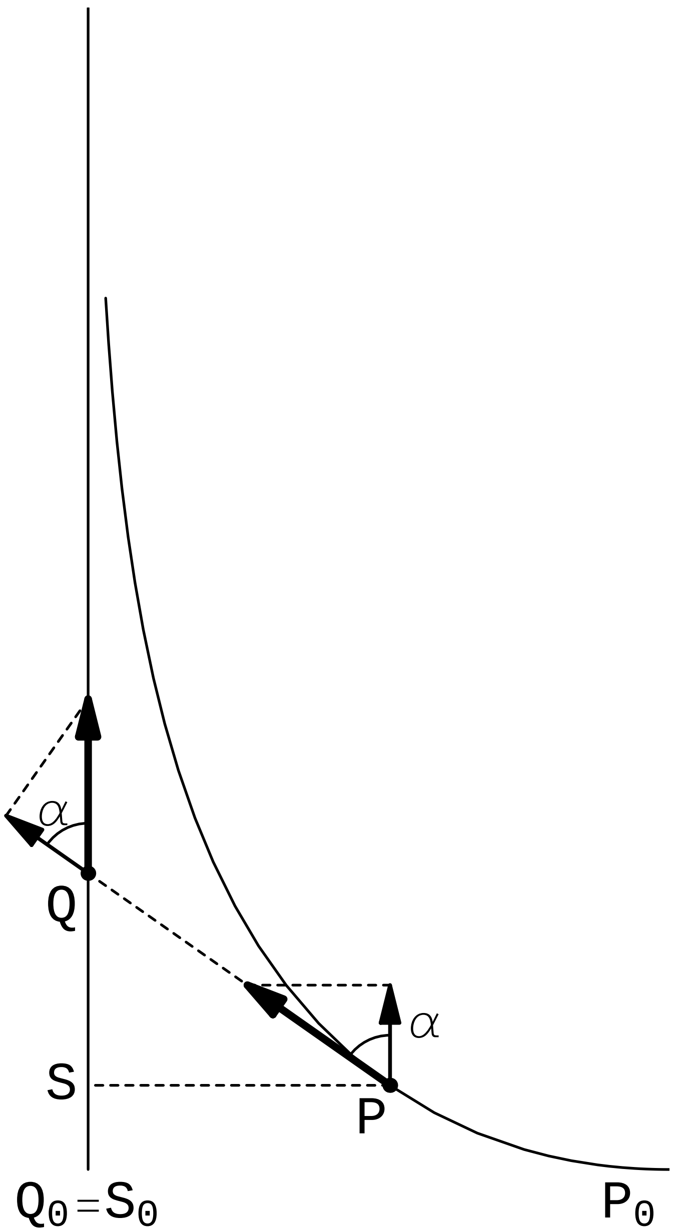
Il problema delle navi



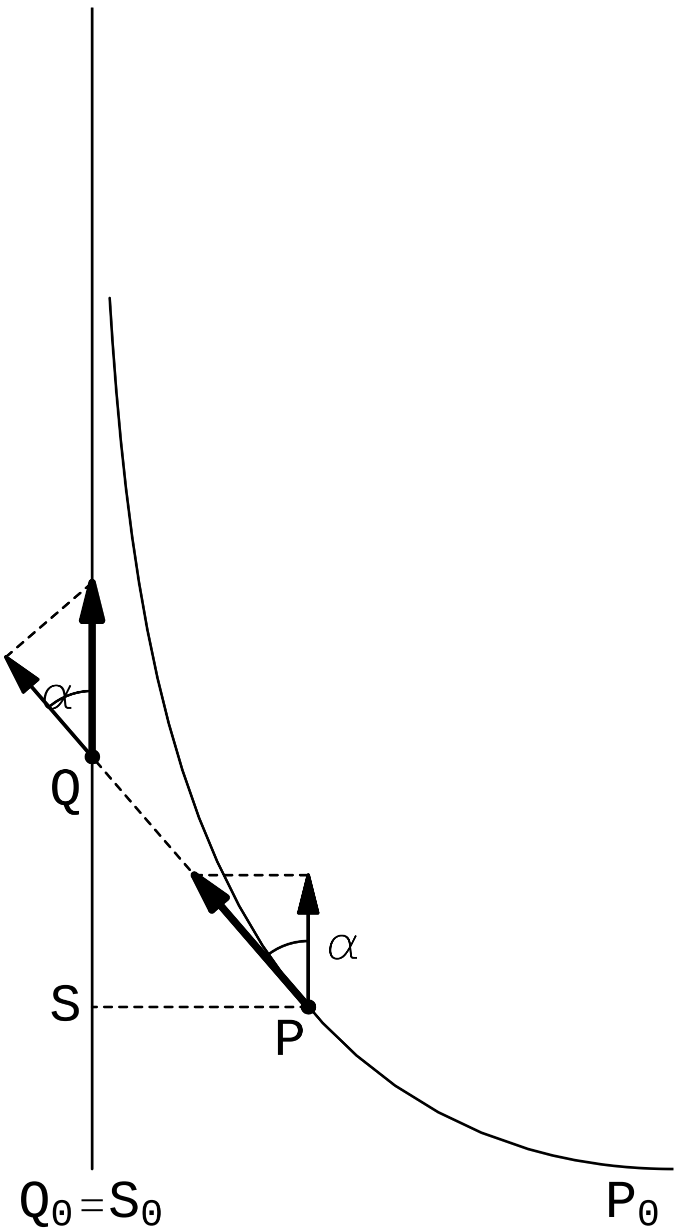
Il problema delle navi



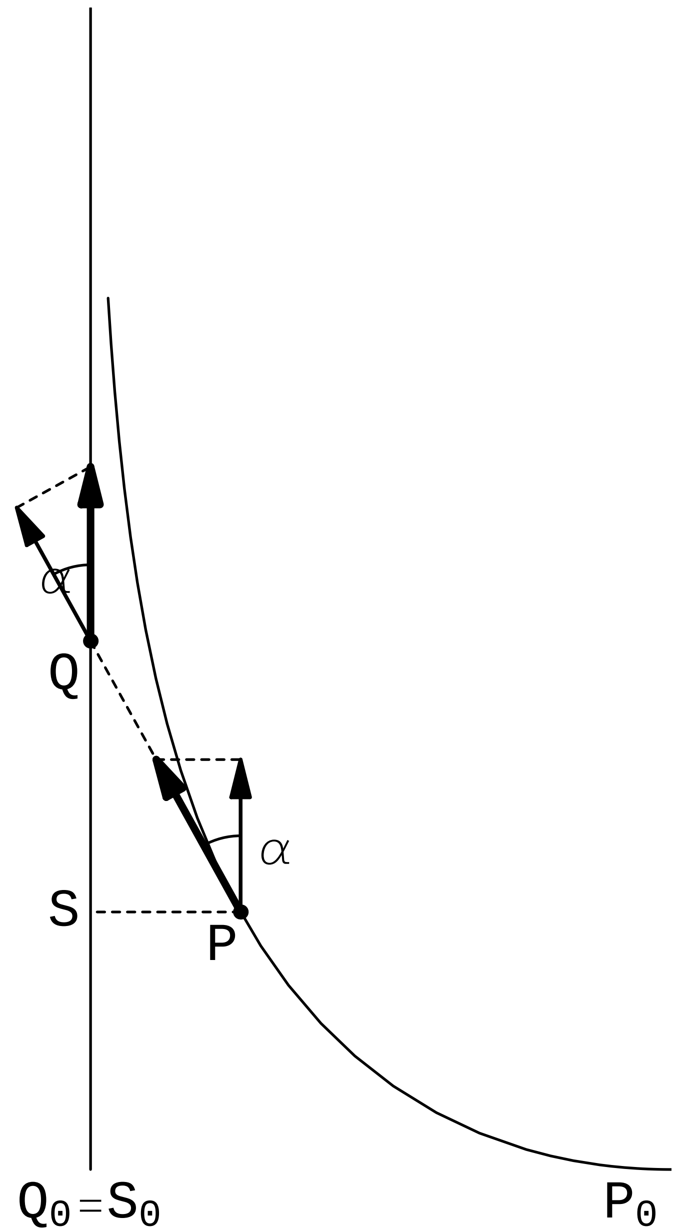
Il problema delle navi



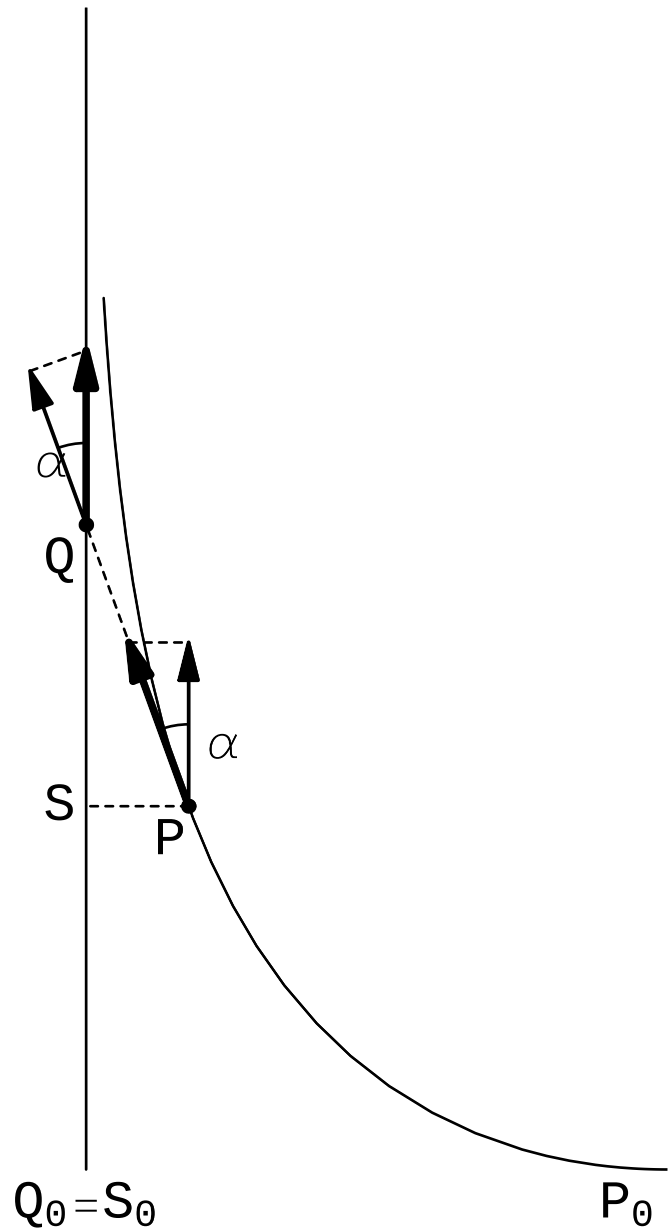
Il problema delle navi

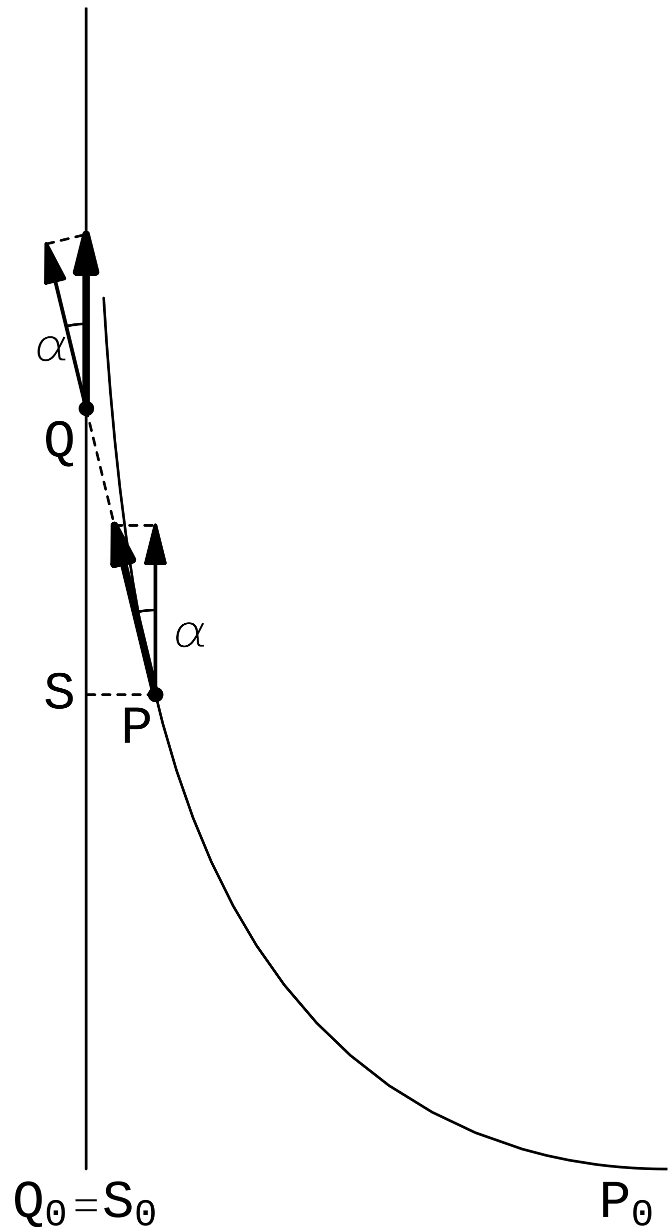


Il problema delle navi

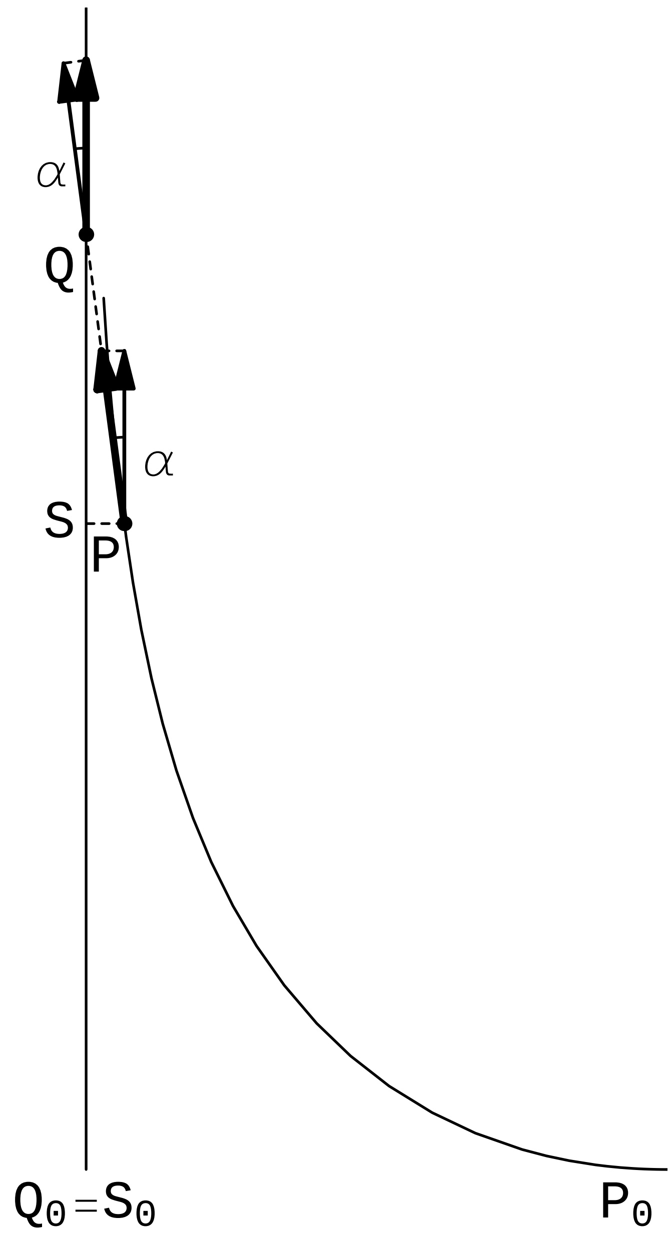


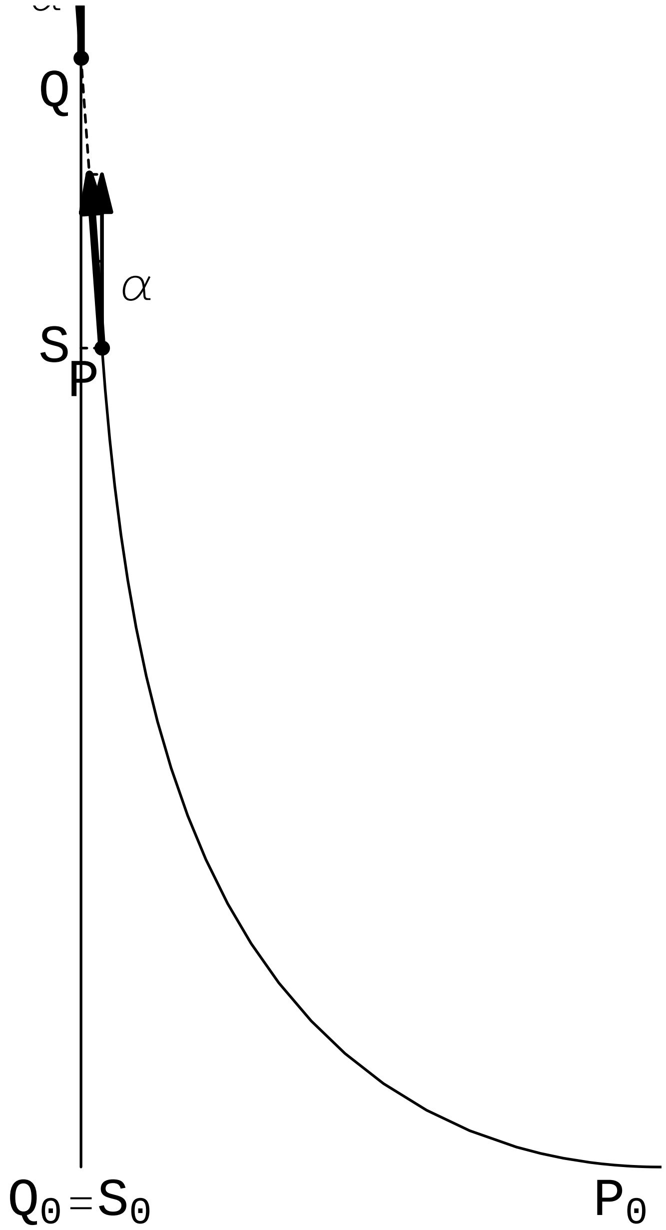
Il problema delle navi




α
Q
α
S
P
Q0 = S0
P0

Il problema delle navi





Q
α
S
P
$Q_0 = S_0$
P_0

Il problema delle navi

Indichiamo con α l'angolo che la direzione PQ forma istante per istante con la scia della nave Q e con v la velocità delle navi P e Q nello stesso istante.

Il problema delle navi

Indichiamo con α l'angolo che la direzione PQ forma istante per istante con la scia della nave Q e con v la velocità delle navi P e Q nello stesso istante.
L'avvicinamento delle navi dipende dalla velocità della nave P diretta verso Q e dalla componente $v \cos \alpha$ della velocità della nave Q, lungo la direzione PQ; pertanto la distanza fra le navi diminuisce con velocità $v(1 - \cos \alpha)$.

Indichiamo con α l'angolo che la direzione PQ forma istante per istante con la scia della nave Q e con v la velocità delle navi P e Q nello stesso istante.
L'avvicinamento delle navi dipende dalla velocità della nave P diretta verso Q e dalla componente $v\cos\alpha$ della velocità della nave Q, lungo la direzione PQ; pertanto la distanza fra le navi diminuisce con velocità $v(1-\cos\alpha)$.
La proiezione S del punto P sulla scia della nave Q si sposta lungo questa scia con velocità $v\cos\alpha$ e la nave Q scappa con velocità v, quindi la distanza SQ cresce con velocità $v(1-\cos\alpha)$.

Indichiamo con α l'angolo che la direzione PQ forma istante per istante con la scia della nave Q e con v la velocità delle navi P e Q nello stesso istante.
L'avvicinamento delle navi dipende dalla velocità della nave P diretta verso Q e dalla componente $v \cos \alpha$ della velocità della nave Q, lungo la direzione PQ; pertanto la distanza fra le navi diminuisce con velocità $v(1 - \cos \alpha)$.
La proiezione S del punto P sulla scia della nave Q si sposta lungo questa scia con velocità $v \cos \alpha$ e la nave Q scappa con velocità v, quindi la distanza SQ cresce con velocità $v(1 - \cos \alpha)$.
Dato che, come abbiamo già notato, la distanza PQ decresce e la distanza SQ cresce con la stessa velocità, la somma $PQ + SQ$ è costante e risulta uguale a 10 miglia marine.

Il problema delle navi

Indichiamo con α l'angolo che la direzione PQ forma istante per istante con la scia della nave Q e con v la velocità delle navi P e Q nello stesso istante.
L'avvicinamento delle navi dipende dalla velocità della nave P diretta verso Q e dalla componente $v\cos\alpha$ della velocità della nave Q, lungo la direzione PQ; pertanto la distanza fra le navi diminuisce con velocità $v(1-\cos\alpha)$.
La proiezione S del punto P sulla scia della nave Q si sposta lungo questa scia con velocità $v\cos\alpha$ e la nave Q scappa con velocità v, quindi la distanza SQ cresce con velocità $v(1-\cos\alpha)$.
Dato che, come abbiamo già notato, la distanza PQ decresce e la distanza SQ cresce con la stessa velocità, la somma $PQ+SQ$ è costante e risulta uguale a 10 miglia marine.
Dopo molto tempo P si avvicinerà alquanto a S e avremo, per tempi molto grandi, $2PQ = PQ+SQ = 10$ miglia, da cui $PQ = 5$ miglia.

Cap. 3

Alcune proprietà generali sugli inseguimenti

Il problema generale

Il problema può essere generalizzato nel seguente modo:

Il problema può essere generalizzato nel seguente modo:
Sia dato un corpo A che si muove in $\mathbb{R}^n$ con traiettoria rappresentata parametricamente da $x(t)$.

Il problema generale

Il problema può essere generalizzato nel seguente modo:
Sia dato un corpo A che si muove in $\mathbb{R}^n$ con traiettoria rappresentata parametricamente da $x(t)$.
Sia B un altro corpo posto nel punto (a, b) all'istante $t = 0$, la cui traiettoria (incognita) sarà $y(t)$.

Il problema generale

Il problema può essere generalizzato nel seguente modo:
Sia dato un corpo A che si muove in $\mathbb{R}^n$ con traiettoria rappresentata parametricamente da $x(t)$.
Sia B un altro corpo posto nel punto (a, b) all'istante $t = 0$, la cui traiettoria (incognita) sarà $y(t)$.
La traiettoria di A deve puntare verso B, in ogni istante.

Il problema generale

Il problema può essere generalizzato nel seguente modo:
Sia dato un corpo A che si muove in $\mathbb{R}^n$ con traiettoria rappresentata parametricamente da $x(t)$.
Sia B un altro corpo posto nel punto (a, b) all'istante $t = 0$, la cui traiettoria (incognita) sarà $y(t)$.
La traiettoria di A deve puntare verso B, in ogni istante.
Inolre, per coerenza coi problemi studiati, le velocità di inseguitore e inseguito vogliamo che siano uguali in norma.

Il problema può essere generalizzato nel seguente modo:
Sia dato un corpo A che si muove in $\mathbb{R}^n$ con traiettoria rappresentata parametricamente da $x(t)$.
Sia B un altro corpo posto nel punto (a, b) all'istante $t = 0$, la cui traiettoria (incognita) sarà $y(t)$.
La traiettoria di A deve puntare verso B, in ogni istante.
Inolre, per coerenza coi problemi studiati, le velocità di inseguitore e inseguito vogliamo che siano uguali in norma.
L'equazione differenziale risultante sarà:

$$y'(t) = \frac{x(t) - y(t)}{\|x(t) - y(t)\|} \|x'(t)\|$$

Il problema generale

Poniamo $z(t) := x(t) - y(t)$**. Avremo anche** $z'(t) = x'(t) - y'(t)$**.**

Poniamo $z(t) := x(t) - y(t)$. Avremo anche $z'(t) = x'(t) - y'(t)$. Quindi, aggiungendo le condizioni iniziali e usando la nuova notazione, l'equazione precedente diventa:

$$y'(t) = \frac{x(t) - y(t)}{\|x(t) - y(t)\|} \|x'(t)\|$$

Il problema generale

Poniamo $z(t) := x(t) - y(t)$**. Avremo anche** $z'(t) = x'(t) - y'(t)$**. Quindi, aggiungendo le condizioni iniziali e usando la nuova notazione, l'equazione precedente diventa:**

$$y'(t) = \frac{z(t)}{\|z(t)\|} \|x'(t)\|$$

Poniamo $z(t) := x(t) - y(t)$**. Avremo anche** $z'(t) = x'(t) - y'(t)$**. Quindi, aggiungendo le condizioni iniziali e usando la nuova notazione, l'equazione precedente diventa:**

$$z'(t) - x'(t) = \frac{z(t)}{\|z(t)\|} \|x'(t)\|$$

Poniamo $z(t) := x(t) - y(t)$**. Avremo anche** $z'(t) = x'(t) - y'(t)$**. Quindi, aggiungendo le condizioni iniziali e usando la nuova notazione, l'equazione precedente diventa:**

$$z'(t) = x'(t) + \frac{z(t)}{\|z(t)\|}\,\|x'(t)\|$$

Il problema generale

Poniamo $z(t) := x(t) - y(t)$. Avremo anche $z'(t) = x'(t) - y'(t)$. Quindi, aggiungendo le condizioni iniziali e usando la nuova notazione, l'equazione precedente diventa:

$$\begin{cases} z'(t) = x'(t) - \dfrac{z(t)}{\|z(t)\|} \|x'(t)\| \\ z(0) = z_0 \neq 0 \end{cases}$$

Il problema generale

Poniamo $z(t) := x(t) - y(t)$**. Avremo anche** $z'(t) = x'(t) - y'(t)$**. Quindi, aggiungendo le condizioni iniziali e usando la nuova notazione, l'equazione precedente diventa:**

$$\begin{cases} z'(t) = x'(t) - \dfrac{z(t)}{\|z(t)\|}\|x'(t)\| \\ z(0) = z_0 \neq 0 \end{cases}$$

Questo è un problema di Cauchy che è molto difficile da risolvere nel caso più generale.

Il problema generale

Poniamo $z(t) := x(t) - y(t)$. Avremo anche $z'(t) = x'(t) - y'(t)$. Quindi, aggiungendo le condizioni iniziali e usando la nuova notazione, l'equazione precedente diventa:

$$\begin{cases} z'(t) = x'(t) - \dfrac{z(t)}{\|z(t)\|}\,\|x'(t)\| \\ z(0) = z_0 \neq 0 \end{cases}$$

Questo è un problema di Cauchy che è molto difficile da risolvere nel caso più generale.
Tuttavia possiamo fare alcune considerazioni sulla distanza tra i due corpi e sull'angolo tra le traiettorie.

Le equazioni ausiliarie

Poniamo $\rho(t) = \|z(t)\|$ **e** $\sigma(t) = \left\langle \frac{x'(t)}{\|x'(t)\|}, \frac{z(t)}{\|z(t)\|} \right\rangle$**.**

Le equazioni ausiliarie

Poniamo $\rho(t) = \|z(t)\|$ **e** $\sigma(t) = \left\langle \frac{x'(t)}{\|x'(t)\|}, \frac{z(t)}{\|z(t)\|} \right\rangle$**.**

La funzione $\rho(t)$ **rappresenta la distanza tra i due corpi.**

Le equazioni ausiliarie

Poniamo $\rho(t) = \|z(t)\|$ **e** $\sigma(t) = \left\langle \frac{x'(t)}{\|x'(t)\|}, \frac{z(t)}{\|z(t)\|} \right\rangle$**.**

La funzione $\rho(t)$ **rappresenta la distanza tra i due corpi.**

La funzione $\sigma(t)$ **rappresenta il coseno dell'angolo tra le direzioni del moto dei due corpi.**

Poniamo $\rho(t) = \|z(t)\|$ e $\sigma(t) = \left\langle \frac{x'(t)}{\|x'(t)\|}, \frac{z(t)}{\|z(t)\|} \right\rangle$.
La funzione $\rho(t)$ rappresenta la distanza tra i due corpi.
La funzione $\sigma(t)$ rappresenta il coseno dell'angolo tra le direzioni del moto dei due corpi.
Studiando $\rho(t)$, si giunge alla seguente legge di conservazione:

$$\rho(t) + \int_0^t \left\|x'(s)\right\| (1 - \sigma(s)) \, ds = \rho(0) = \|z_0\| \,. \tag{3.1}$$

Poniamo $\rho(t) = \|z(t)\|$ e $\sigma(t) = \left\langle \frac{x'(t)}{\|x'(t)\|}, \frac{z(t)}{\|z(t)\|} \right\rangle$.
La funzione $\rho(t)$ rappresenta la distanza tra i due corpi.
La funzione $\sigma(t)$ rappresenta il coseno dell'angolo tra le direzioni del moto dei due corpi.
Studiando $\rho(t)$, si giunge alla seguente legge di conservazione:

$$\rho(t) + \int_0^t \left\|x'(s)\right\| (1 - \sigma(s)) \, ds = \rho(0) = \|z_0\| \,. \tag{3.1}$$

Studiando $\theta(t)$, otteniamo:

$$\sigma' = \left\langle \frac{d}{dt} \frac{x'}{\|x'\|}, \frac{z}{\|z\|} \right\rangle + \frac{\left\|x'\right\|}{\rho}(1 - \sigma^2). \tag{3.2}$$

Le equazioni ausiliarie

Poniamo $\rho(t) = \|z(t)\|$ **e** $\sigma(t) = \left\langle \frac{x'(t)}{\|x'(t)\|}, \frac{z(t)}{\|z(t)\|} \right\rangle$.
La funzione $\rho(t)$ **rappresenta la distanza tra i due corpi.**
La funzione $\sigma(t)$ **rappresenta il coseno dell'angolo tra le direzioni del moto dei due corpi.**
Studiando $\rho(t)$**, si giunge alla seguente legge di conservazione:**

$$\rho(t) + \int_0^t \left\|x'(s)\right\| (1 - \sigma(s))\, ds = \rho(0) = \|z_0\|. \tag{3.1}$$

Studiando $\theta(t)$**, otteniamo:**

$$\sigma' = \left\langle \frac{d}{dt}\frac{x'}{\|x'\|}, \frac{z}{\|z\|} \right\rangle + \frac{\left\|x'\right\|}{\rho}(1 - \sigma^2). \tag{3.2}$$

Ovviamente NON dimostrerò queste formule!

Poniamo $\rho(t) = \|z(t)\|$ e $\sigma(t) = \left\langle \frac{x'(t)}{\|x'(t)\|}, \frac{z(t)}{\|z(t)\|} \right\rangle$.
La funzione $\rho(t)$ rappresenta la distanza tra i due corpi.
La funzione $\sigma(t)$ rappresenta il coseno dell'angolo tra le direzioni del moto dei due corpi.
Studiando $\rho(t)$, si giunge alla seguente legge di conservazione:

$$\rho(t) + \int_0^t \left\|x'(s)\right\| (1 - \sigma(s)) \, ds = \rho(0) = \|z_0\| \,. \tag{3.1}$$

Studiando $\theta(t)$, otteniamo:

$$\sigma' = \left\langle \frac{d}{dt} \frac{x'}{\|x'\|}, \frac{z}{\|z\|} \right\rangle + \frac{\left\|x'\right\|}{\rho}(1 - \sigma^2). \tag{3.2}$$

Ovviamente NON dimostrerò queste formule!
Però vediamo come si applicano ai nostri problemi.

Nel problema degli insetti, l'angolo tra le traiettorie rimaneva costante. Quindi $\sigma(t) \equiv \cos\alpha$.

Nel problema degli insetti, l'angolo tra le traiettorie rimaneva costante. Quindi $\sigma(t) \equiv \cos\alpha$.
Usando questo fatto assieme alla formula 3.1, abbiamo:

$$\rho(t) + \int_0^t \left\|x'(s)\right\| \left(1 - \sigma(s)\right) \, ds = \left\|z_0\right\| .$$

Nel problema degli insetti, l'angolo tra le traiettorie rimaneva costante. Quindi $\sigma(t) \equiv \cos\alpha$.
Usando questo fatto assieme alla formula 3.1, abbiamo:

$$\rho(t) + \int_0^t \|x'(s)\| \, (1 - \cos\alpha) \, ds = \|z_0\| \, .$$

Nel problema degli insetti, l'angolo tra le traiettorie rimaneva costante. Quindi $\sigma(t) \equiv \cos\alpha$.
Usando questo fatto assieme alla formula 3.1, abbiamo:

$$\rho(t) + (1 - \cos\alpha)\int_0^t \left\|x'(s)\right\| \, ds = \left\|z_0\right\| .$$

Nel problema degli insetti, l'angolo tra le traiettorie rimaneva costante. Quindi $\sigma(t) \equiv \cos\alpha$.
Usando questo fatto assieme alla formula 3.1, abbiamo:

$$(1 - \cos\alpha)\int_0^t \left\| x'(s) \right\| \, ds = \|z_0\| - \rho(t).$$

Nel problema degli insetti, l'angolo tra le traiettorie rimaneva costante. Quindi $\sigma(t) \equiv \cos\alpha$.
Usando questo fatto assieme alla formula 3.1, abbiamo:

$$\int_0^t \|x'(s)\| \, ds = \frac{\|z_0\| - \rho(t)}{(1 - \cos\alpha)}.$$

Nel problema degli insetti, l'angolo tra le traiettorie rimaneva costante. Quindi $\sigma(t) \equiv \cos\alpha$.
Usando questo fatto assieme alla formula 3.1, abbiamo:

$$\int_0^t \|x'(s)\| \, ds = \frac{\|z_0\| - \rho(t)}{(1 - \cos\alpha)}.$$

Quando $t \to \infty$, gli insetti sono sempre più vicini e quindi $\rho(t) \to 0$.

Nel problema degli insetti, l'angolo tra le traiettorie rimaneva costante. Quindi $\sigma(t) \equiv \cos\alpha$.
Usando questo fatto assieme alla formula 3.1, abbiamo:

$$\int_0^t \|x'(s)\| \, ds = \frac{\|z_0\| - \rho(t)}{(1 - \cos\alpha)}.$$

Quando $t \to \infty$, gli insetti sono sempre più vicini e quindi $\rho(t) \to 0$.
Abbiamo ottenuto esattamente la lughezza della spirale logaritmica:

$$\int_0^\infty \|x'(s)\| \, ds = \frac{\|z_0\|}{(1 - \cos\alpha)}.$$

Per quanto riguarda il problema delle navi, il discorso è un po' più complicato.

**Per quanto riguarda il problema delle navi, il discorso è un po' più complicato.
L'angolo varia nel tempo. quindi l'integrale della 3.1 sarà difficile da valutare.**

Per quanto riguarda il problema delle navi, il discorso è un po' più complicato.
L'angolo varia nel tempo. quindi l'integrale della 3.1 sarà difficile da valutare.
Tuttavia si semplifica notevolmente la 3.2. Infatti, la traiettoria della nave inseguita è costante e la sua derivata è nulla e possiamo assumere $\left\|x'(t)\right\| \equiv 1$

Per quanto riguarda il problema delle navi, il discorso è un po' più complicato.
L'angolo varia nel tempo. quindi l'integrale della 3.1 sarà difficile da valutare.
Tuttavia si semplifica notevolmente la 3.2. Infatti, la traiettoria della nave inseguita è costante e la sua derivata è nulla e possiamo assumere $\left\| x'(t) \right\| \equiv 1$
Quindi:

$$\sigma' = \left\langle \frac{d}{dt}\frac{x'}{\|x'\|}, \frac{z}{\|z\|} \right\rangle + \frac{\left\| x' \right\|}{\rho}(1 - \sigma^2).$$

Per quanto riguarda il problema delle navi, il discorso è un po' più complicato.
L'angolo varia nel tempo. quindi l'integrale della 3.1 sarà difficile da valutare.
Tuttavia si semplifica notevolmente la 3.2. Infatti, la traiettoria della nave inseguita è costante e la sua derivata è nulla e possiamo assumere $\left\|x'(t)\right\| \equiv 1$
Quindi:

$$\sigma' = \frac{1}{\rho}(1 - \sigma^2).$$

Applicazioni notevoli

Per quanto riguarda il problema delle navi, il discorso è un po' più complicato.
L'angolo varia nel tempo. quindi l'integrale della 3.1 sarà difficile da valutare.
Tuttavia si semplifica notevolmente la 3.2. Infatti, la traiettoria della nave inseguita è costante e la sua derivata è nulla e possiamo assumere $\|x'(t)\| \equiv 1$
Quindi:

$$\sigma' = \frac{1}{\rho}(1 - \sigma^2).$$

Inoltre, derivando la 3.1, abbiamo:

$$\rho(t) + \int_0^t (1 - \sigma(s))\, ds = \|z_0\|\,.$$

Per quanto riguarda il problema delle navi, il discorso è un po' più complicato.
L'angolo varia nel tempo. quindi l'integrale della 3.1 sarà difficile da valutare.
Tuttavia si semplifica notevolmente la 3.2. Infatti, la traiettoria della nave inseguita è costante e la sua derivata è nulla e possiamo assumere $\|x'(t)\| \equiv 1$
Quindi:

$$\sigma' = \frac{1}{\rho}(1 - \sigma^2).$$

Inoltre, derivando la 3.1, abbiamo:

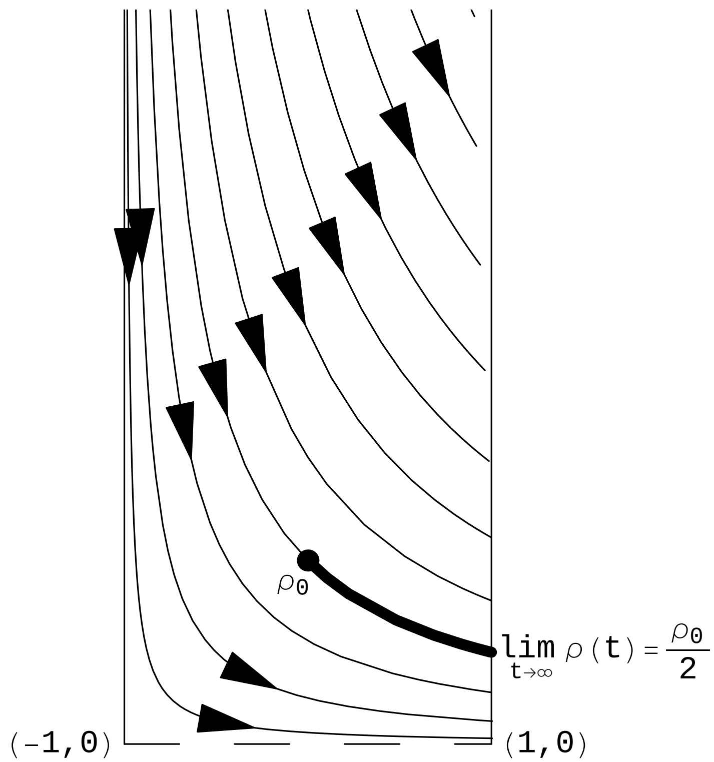
$$\rho'(t) + (1 - \sigma(t)) = 0.$$

Abbiamo ottenuto il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \sigma' = \dfrac{1}{\rho}(1 - \sigma^2) \\ \rho' = \sigma - 1 \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \sigma' = \dfrac{1}{\rho}(1-\sigma^2) \\ \rho' = \sigma - 1 \end{cases}$$

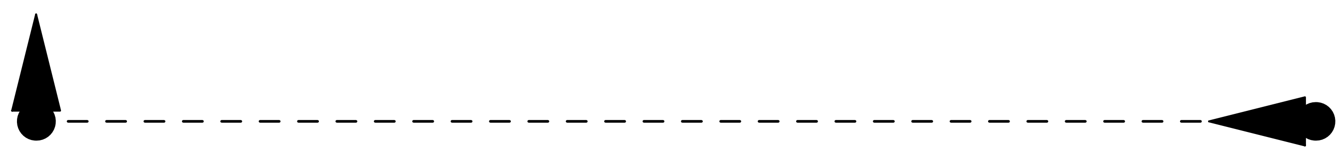


Cap. 4

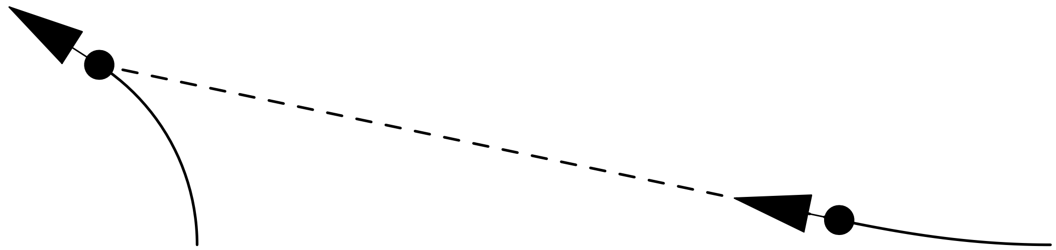
Dulcis in fundo...

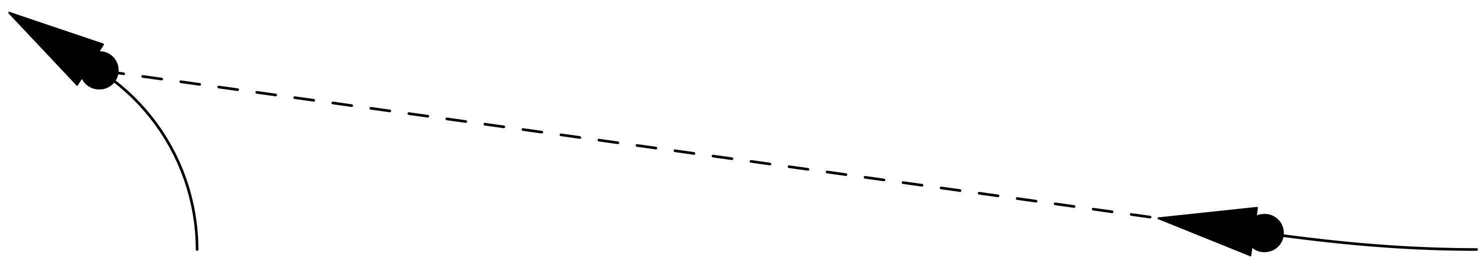
...alcune immagini!

...alcune immagini!

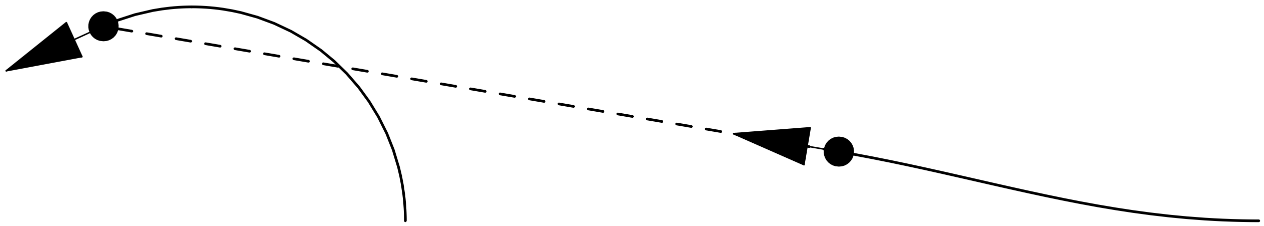


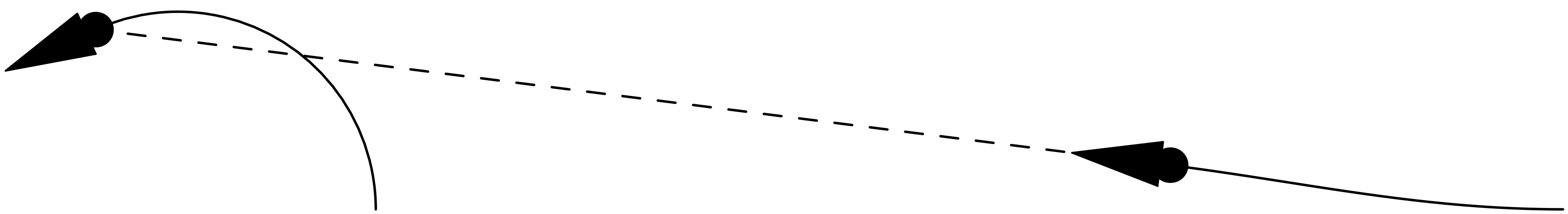
...alcune immagini!

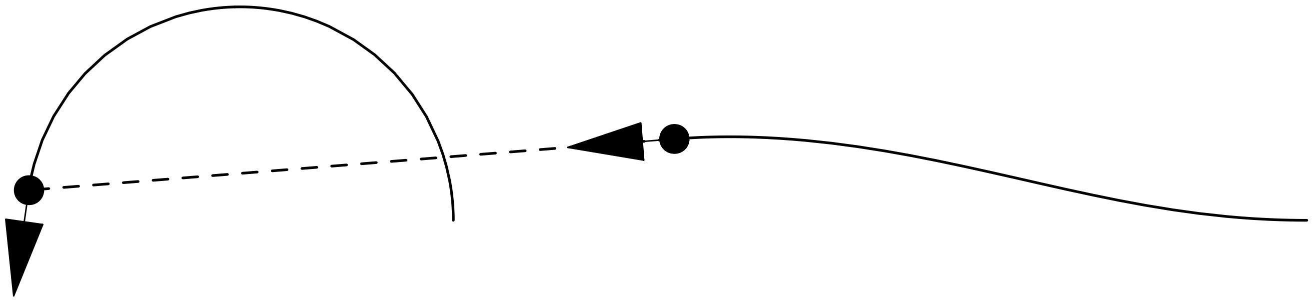


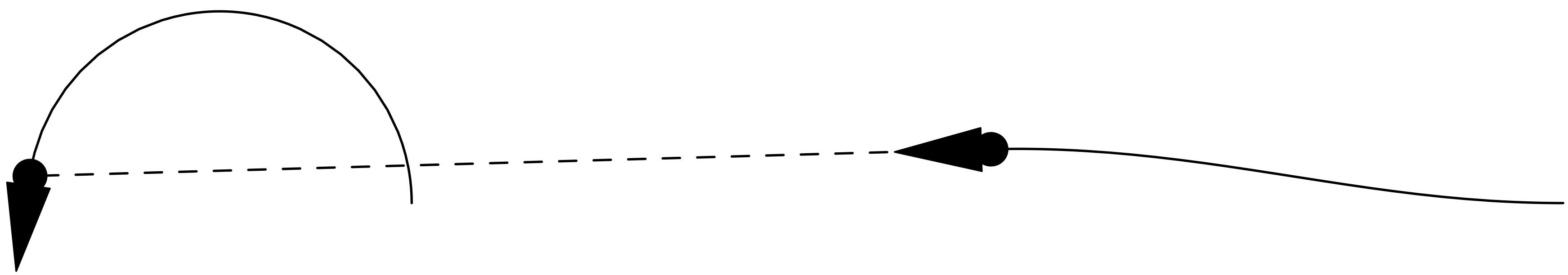


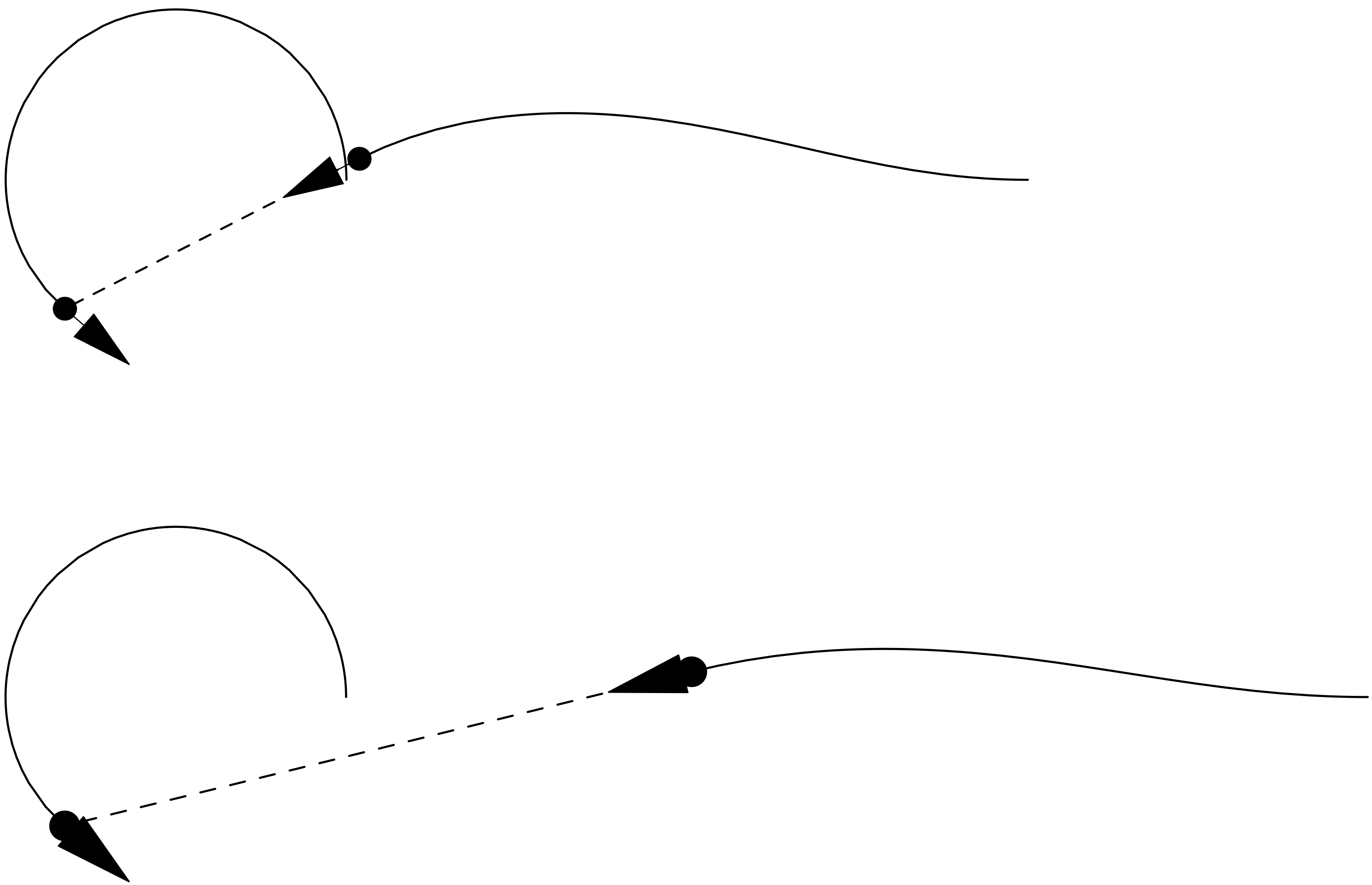
...alcune immagini!

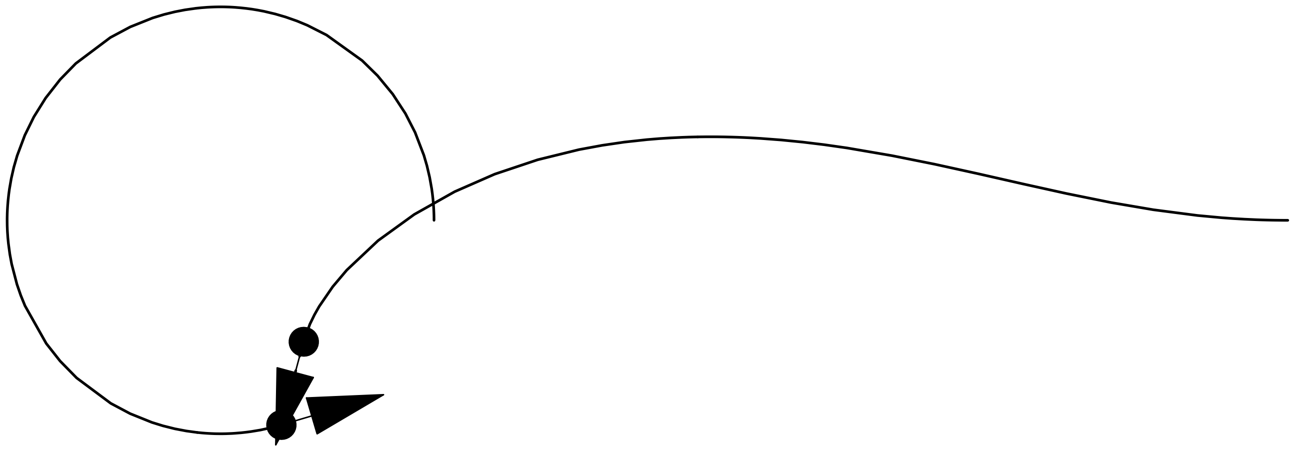


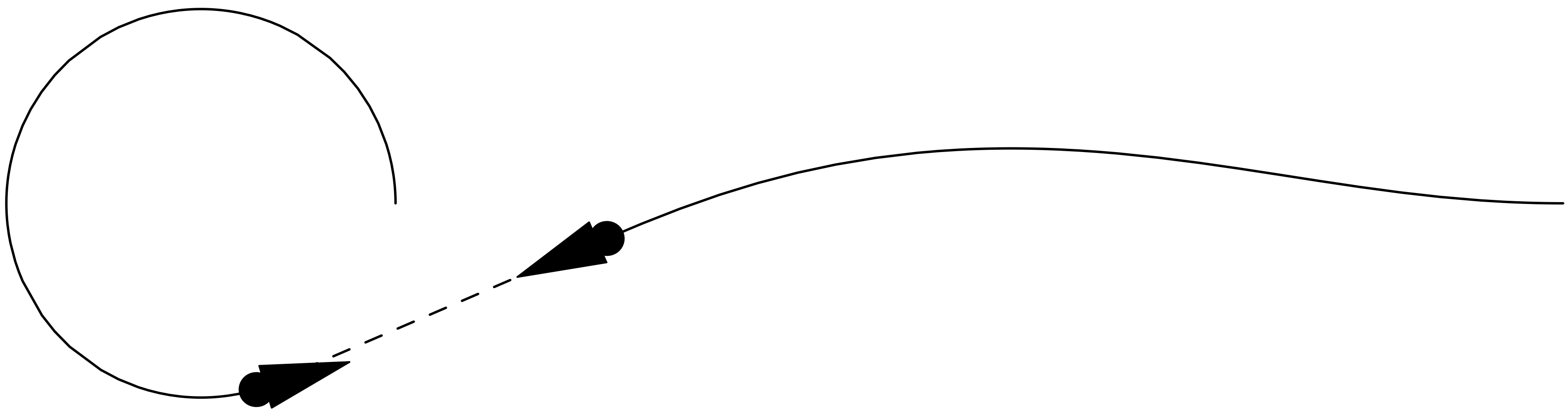




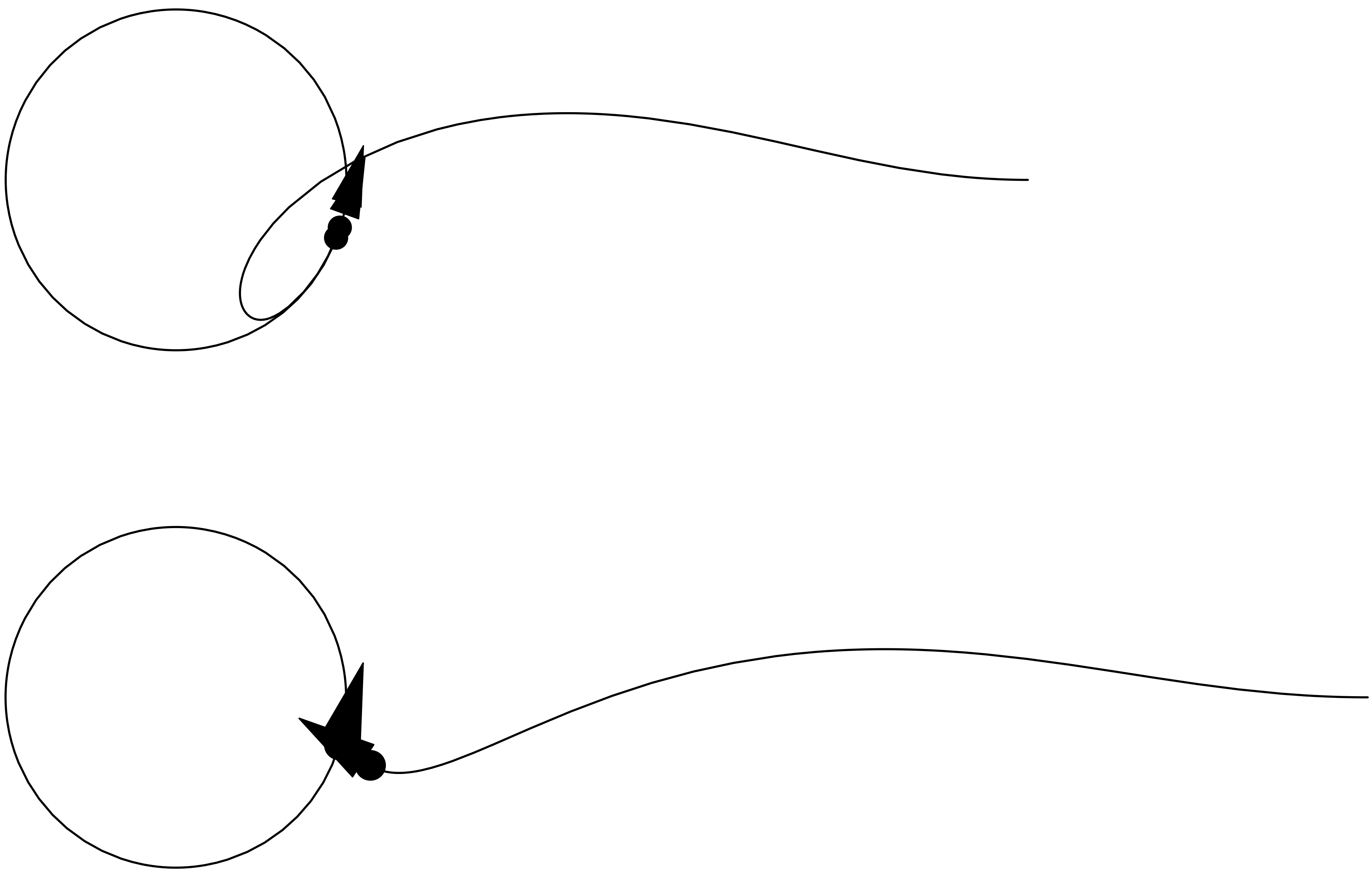




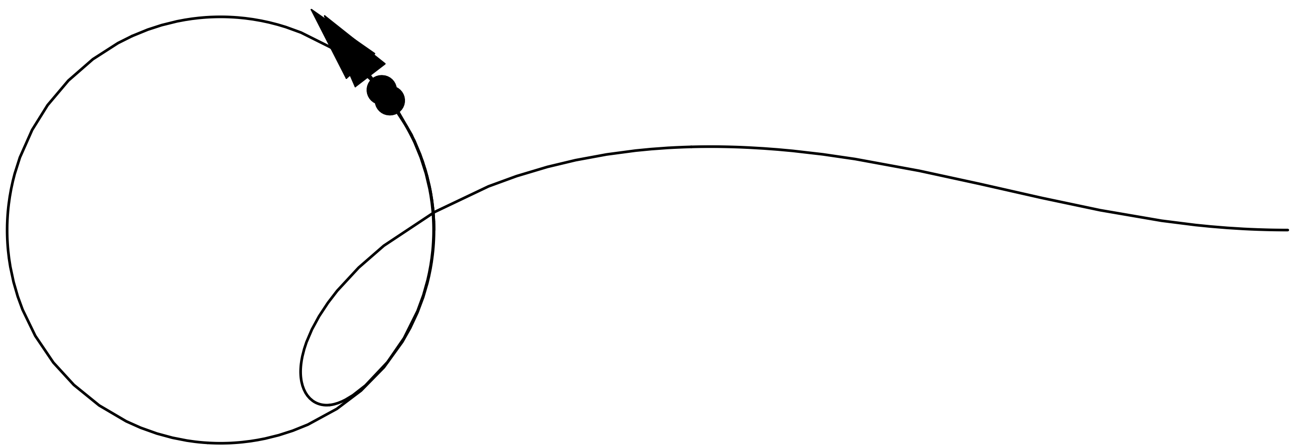


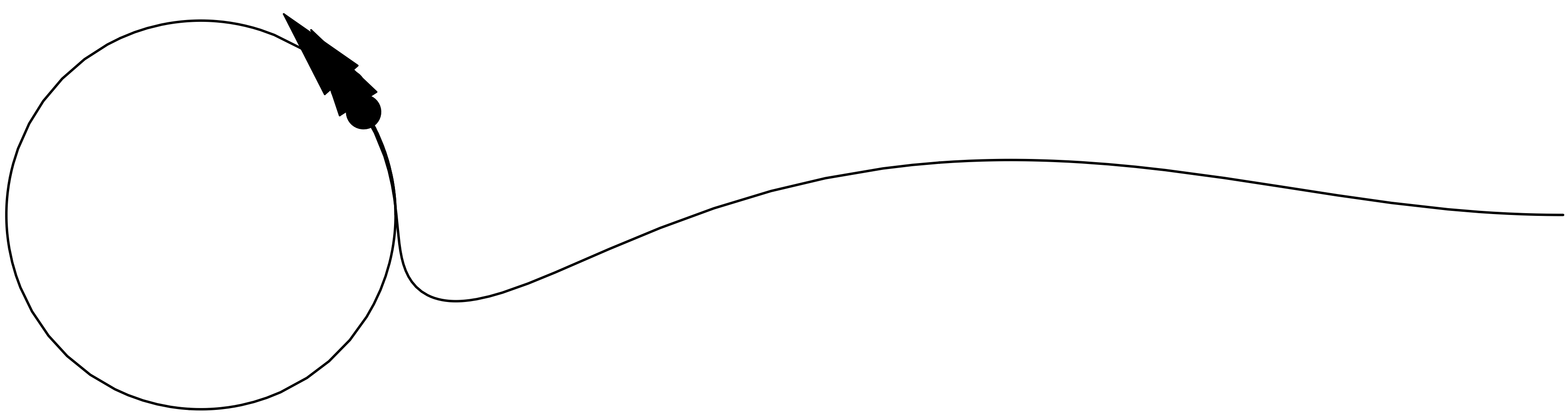


...alcune immagini!

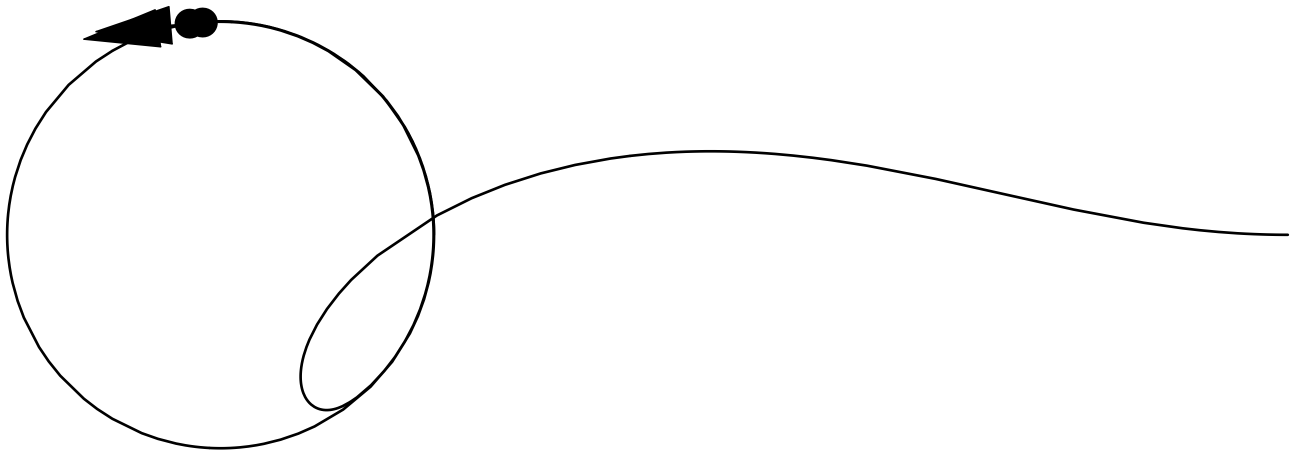


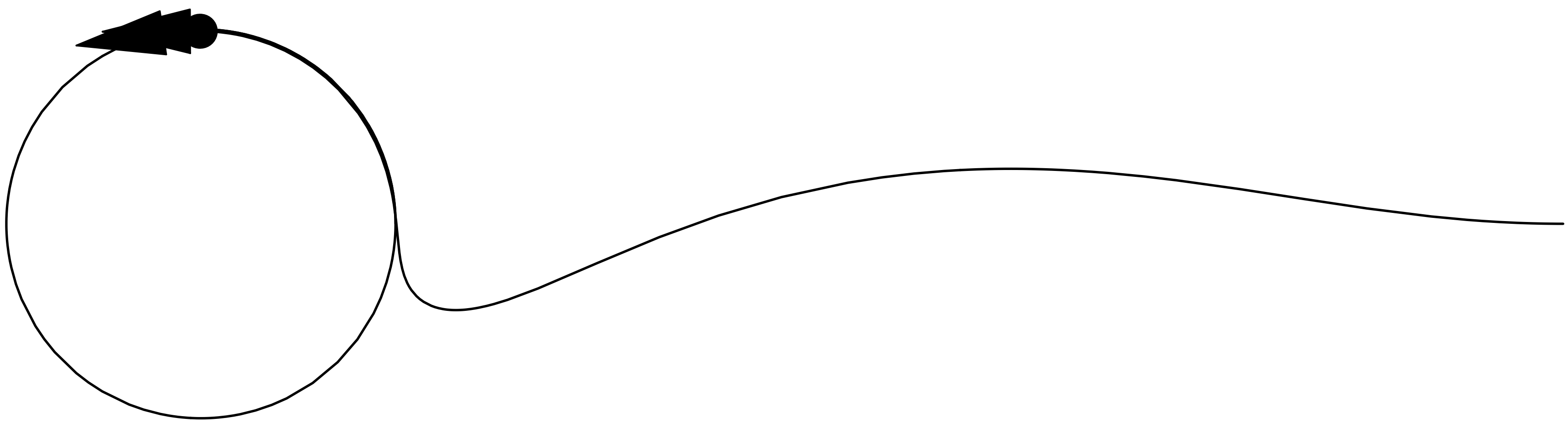
...alcune immagini!



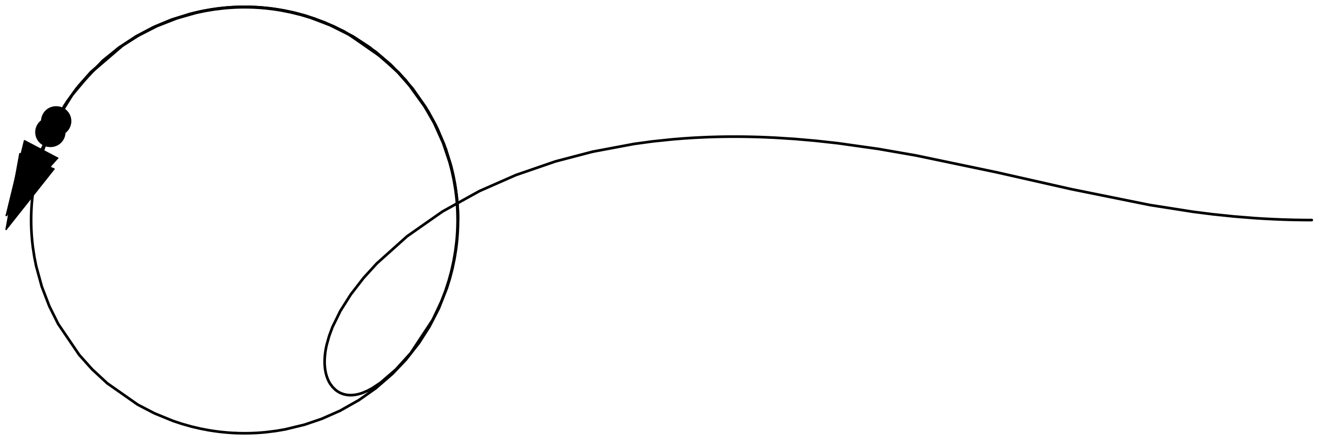


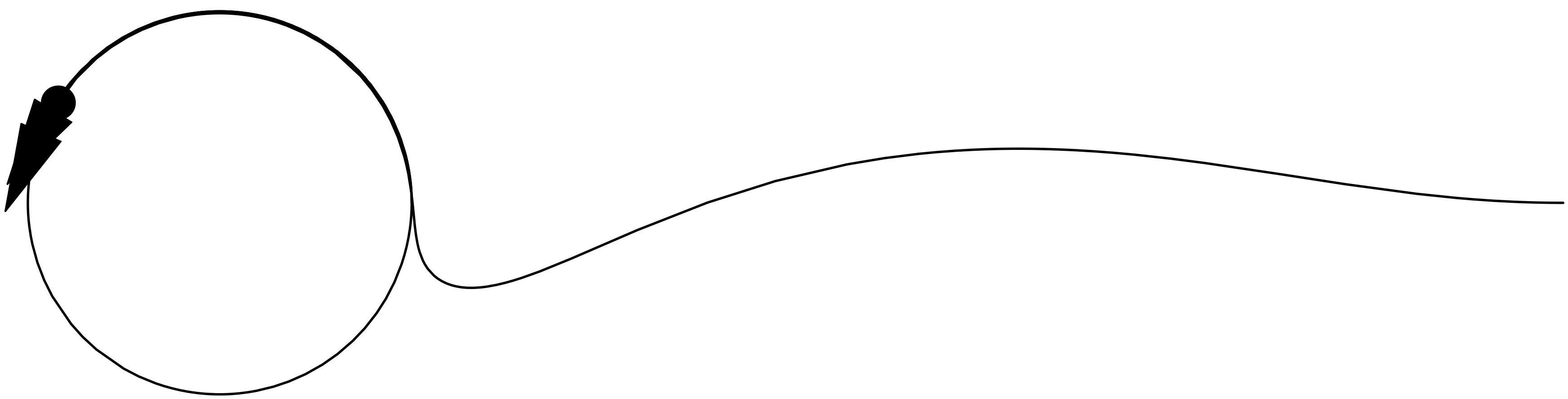
...alcune immagini!

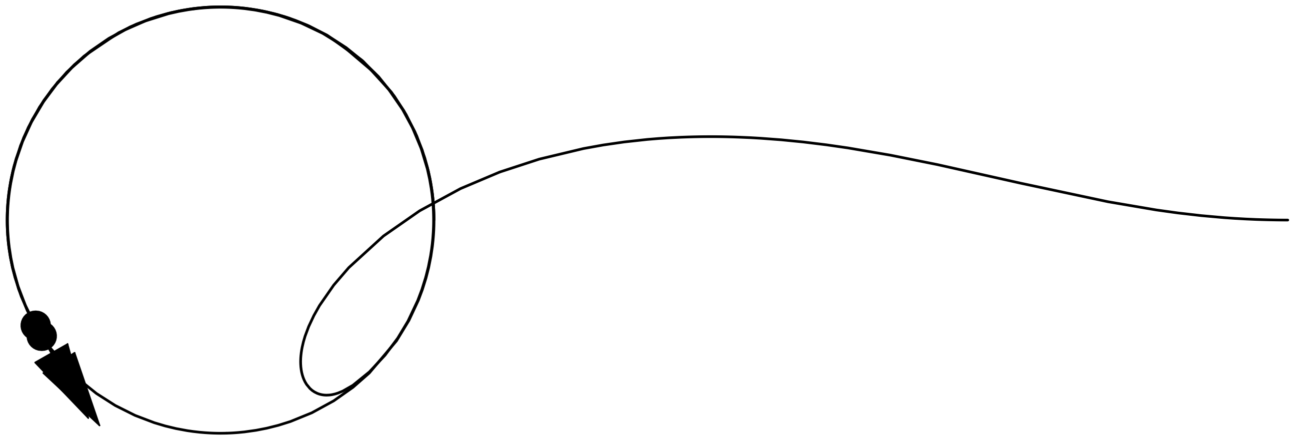


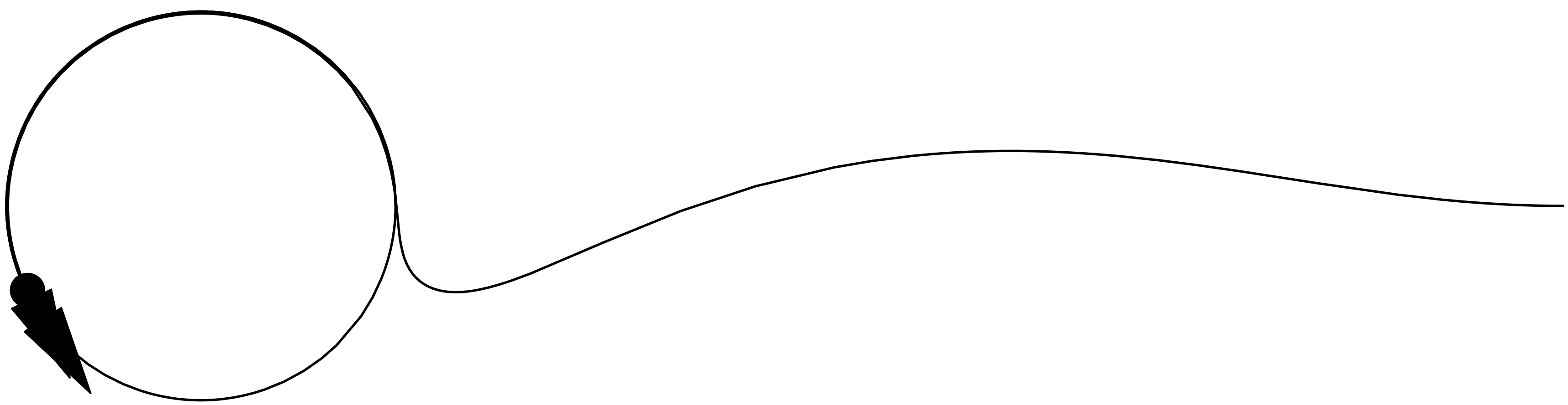


...alcune immagini!

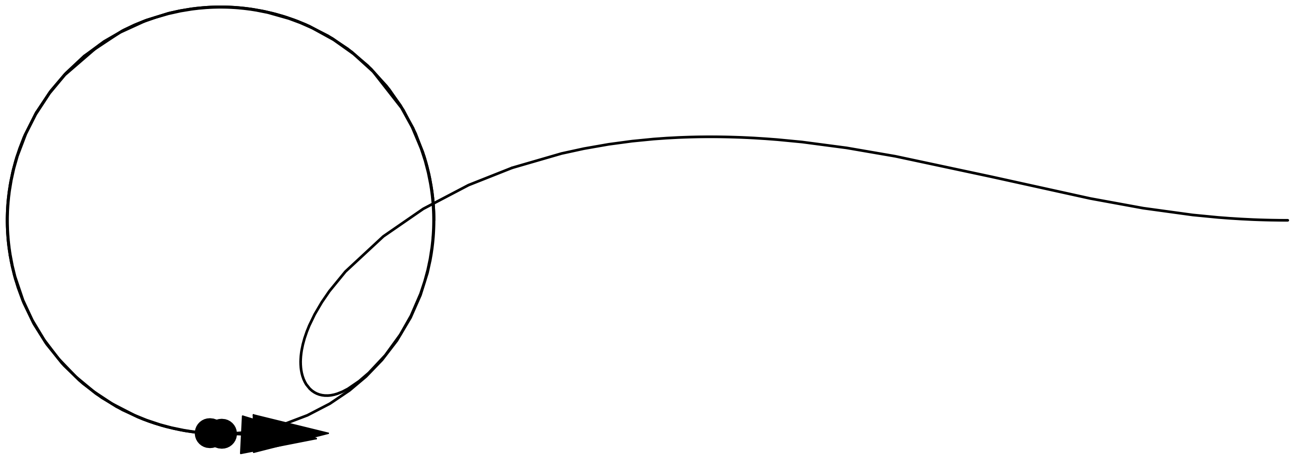


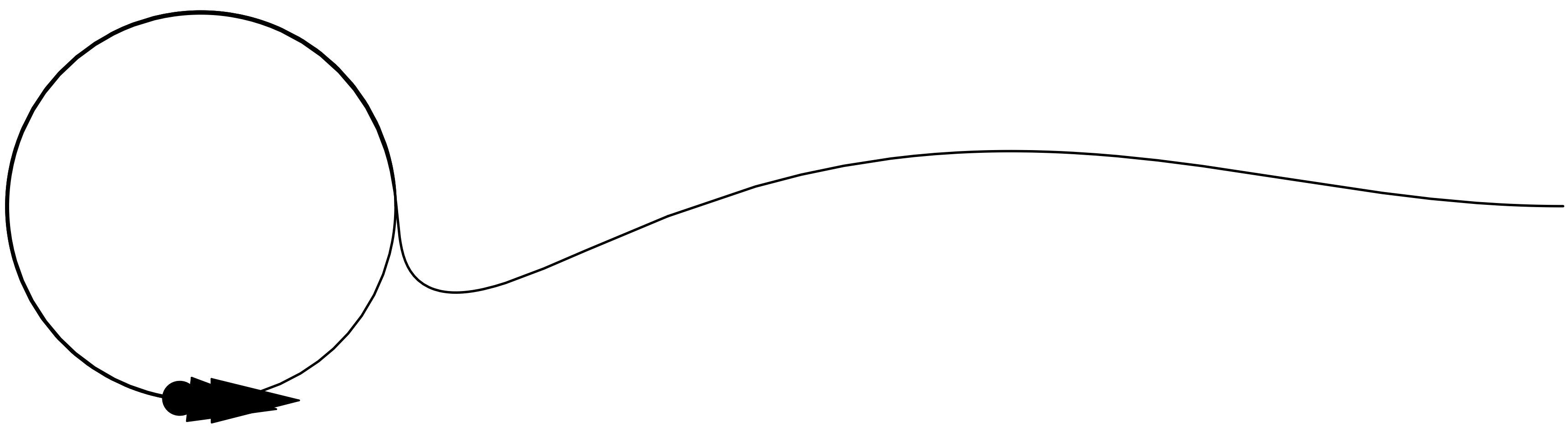




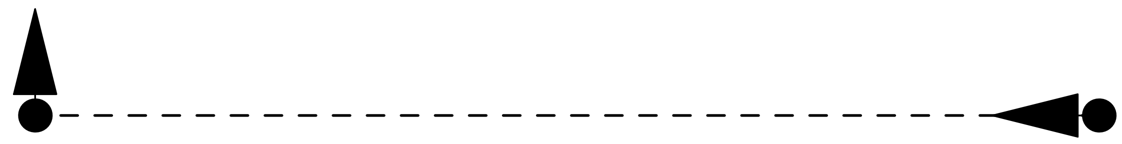


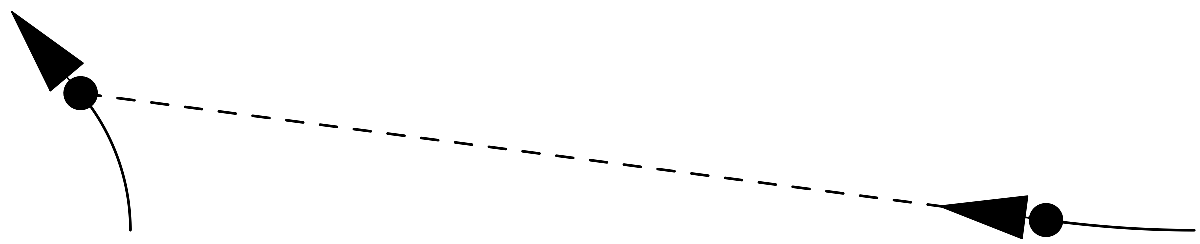
...alcune immagini!



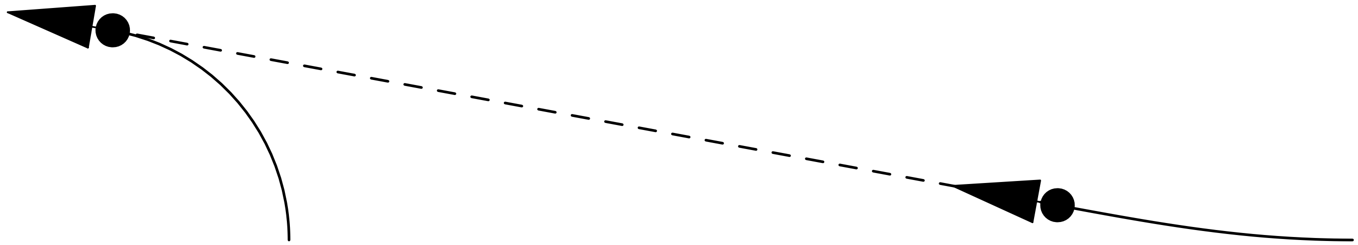


...alcune immagini!

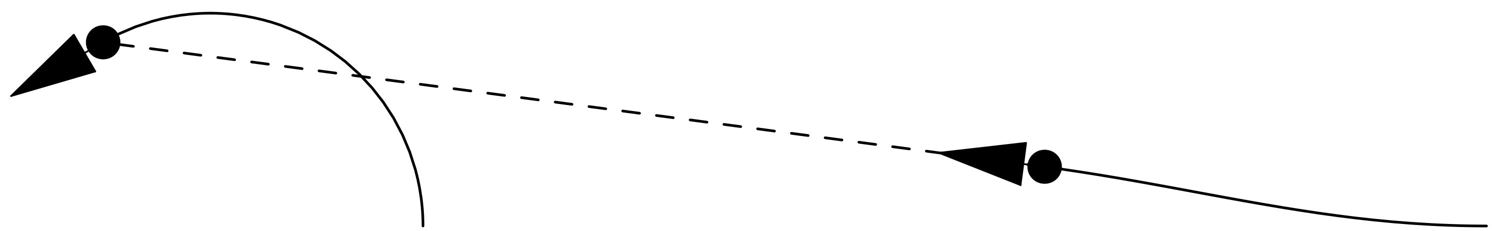




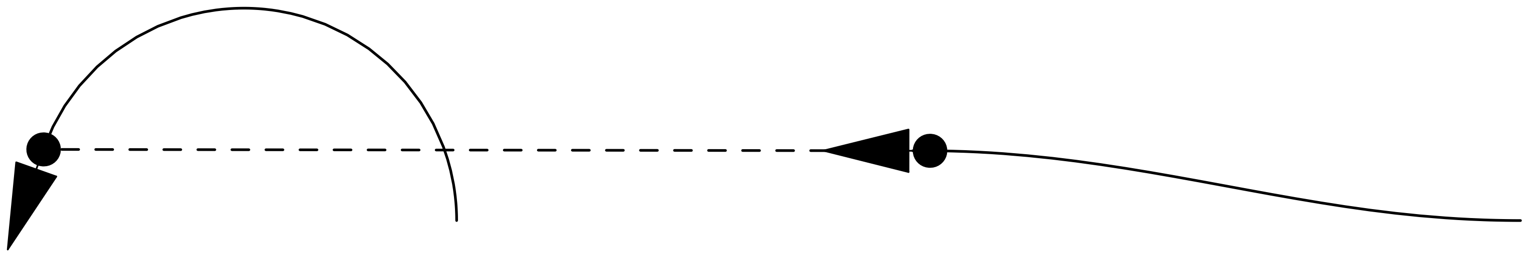
...alcune immagini!



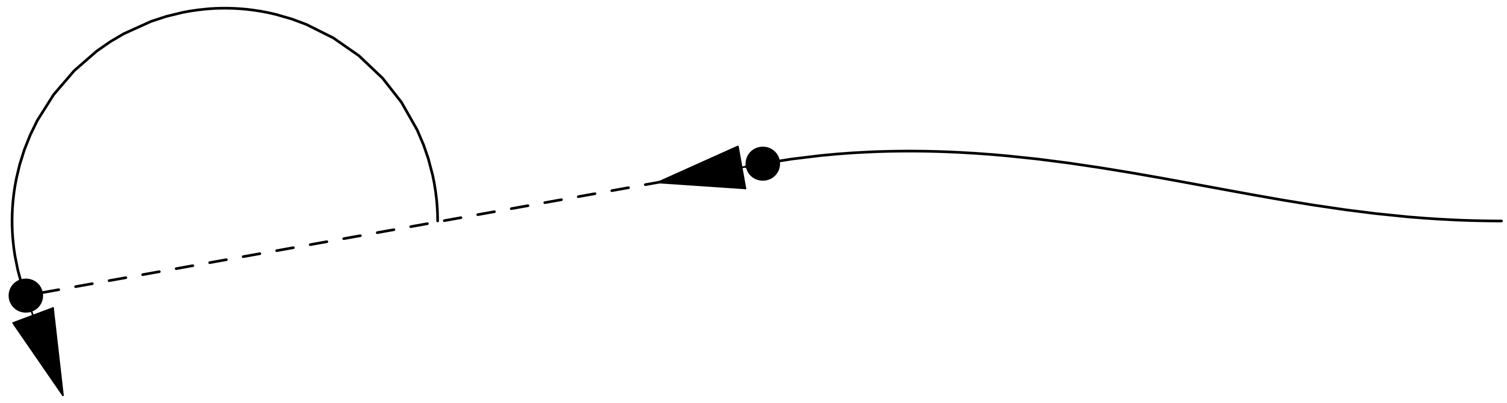
...alcune immagini!

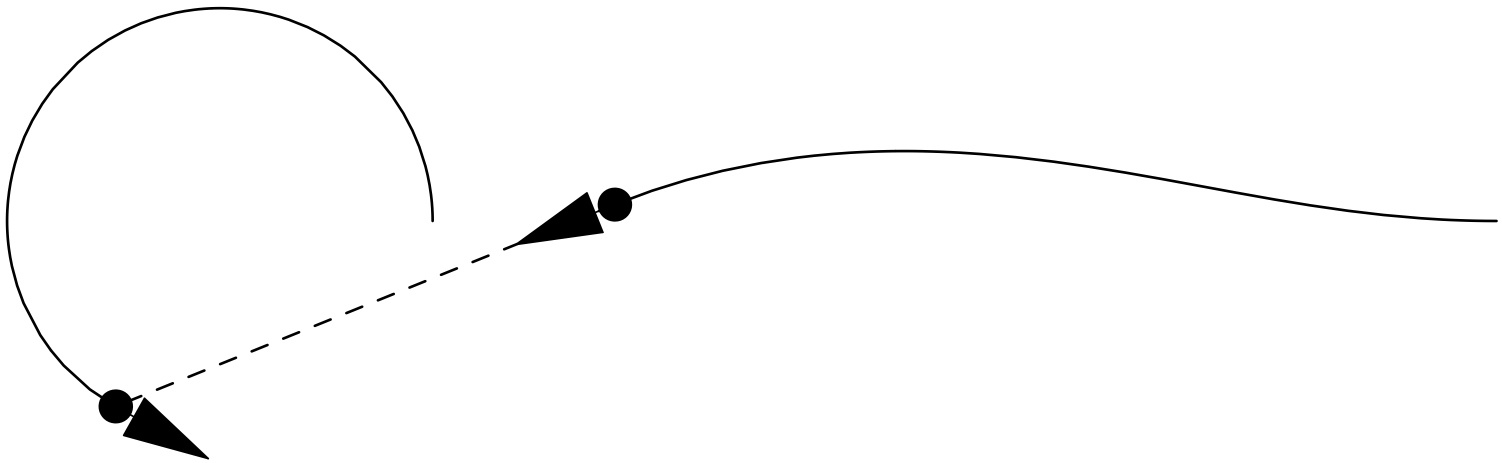


...alcune immagini!

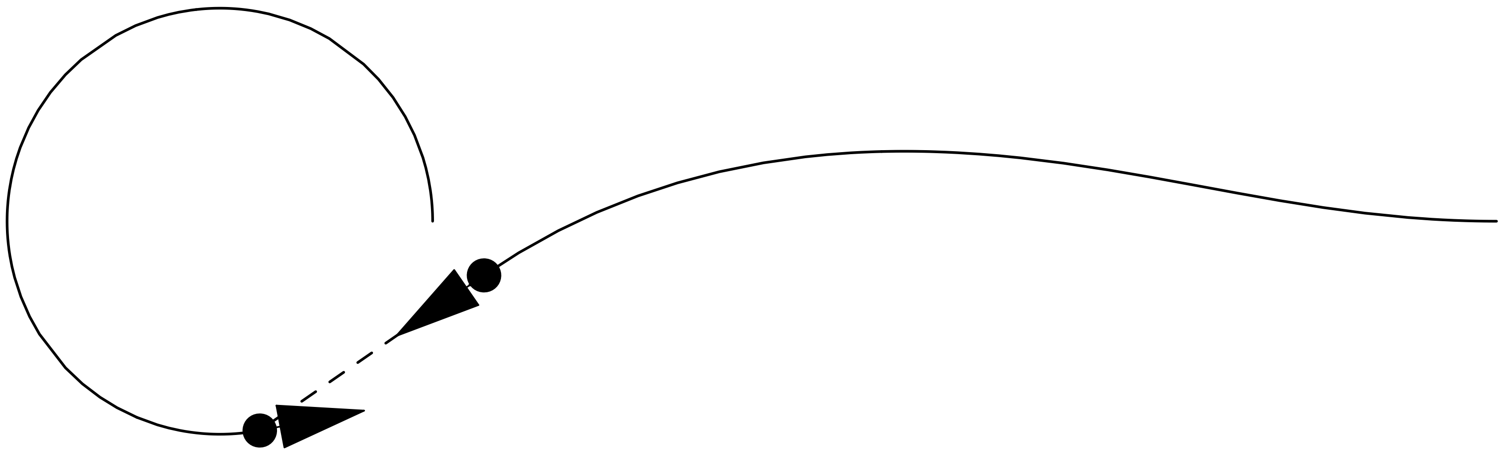


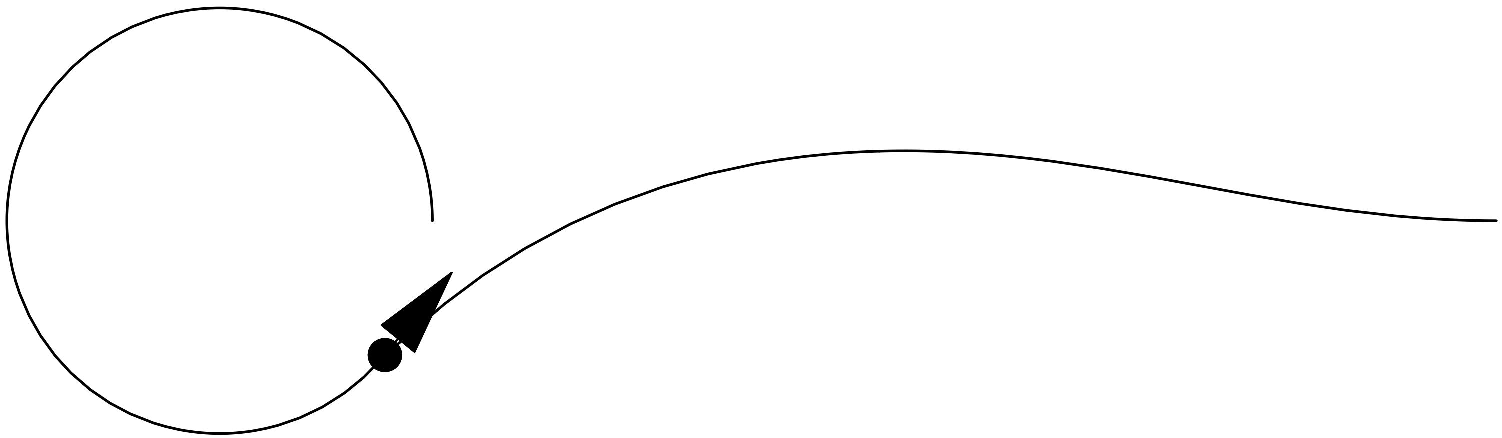
...alcune immagini!



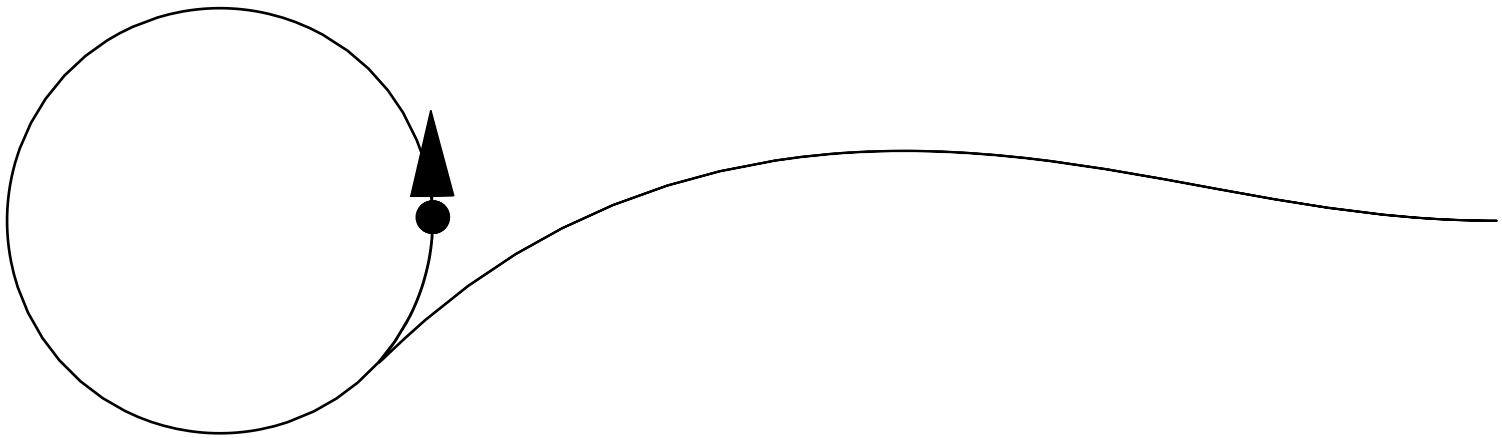


...alcune immagini!

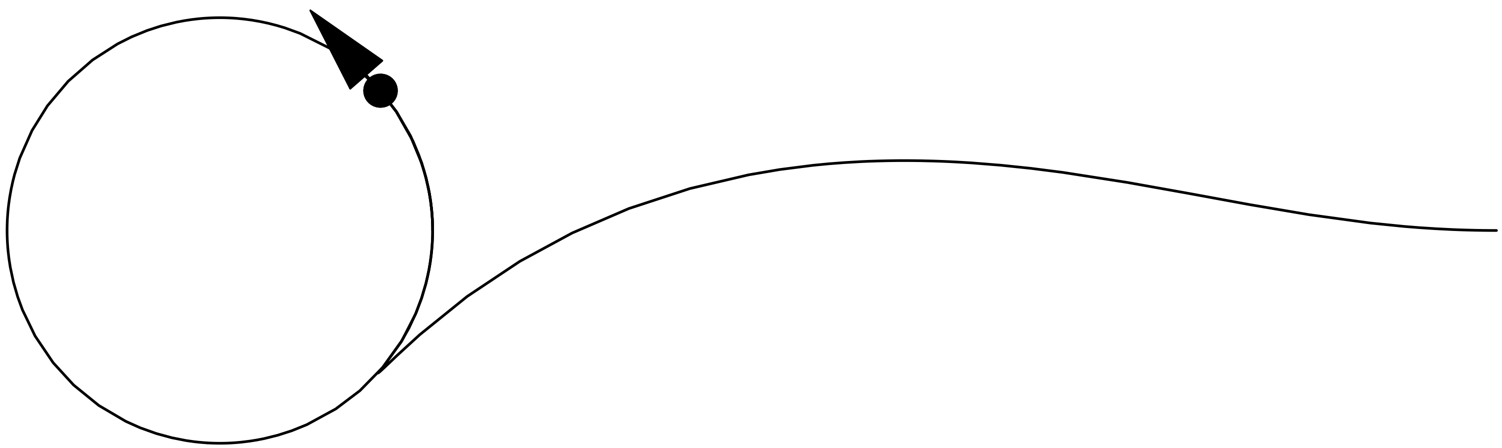


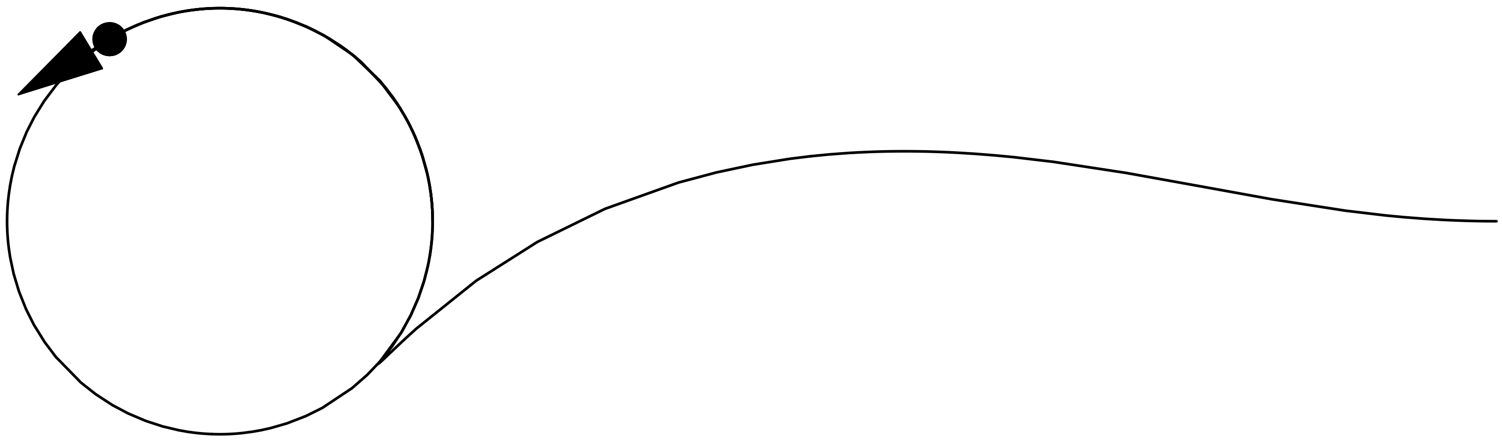


...alcune immagini!



...alcune immagini!





Fine