Ancora radici continue

Questo esercizio è molto difficile. Non sono sicuro di avere una soluzione completa, ma magari qualcuno di voi ha qualche buona idea! Consideriamo la seguente radice continua:

$$\sqrt{1+1\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{\ldots}}}}} \tag{1}$$

Vogliamo stabilire quanto vale.

1. Consideriamo la successione α_n dove

$$\alpha_n = \sqrt{1+1\sqrt{1+2\sqrt{\ldots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}$$

Mostrare che la successione α_n è crescente. Notare che la successione tende al valore di (1)

2. Consideriamo $\beta_n(x)$ che è una modificazione di α_n:

$$\beta_n(x) = \sqrt{1+1\sqrt{1+2\sqrt{\ldots+(n-1)\sqrt{1+nx}}}}$$

Mostrare che $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \mathbb{N}$: $\beta_n(x) \in \mathbb{Z}$. Questo fatto può risultare utile più avanti.

3. Tentiamo una dimostrazione per induzione. Dimostriamo il seguente fatto:

$$n+1 = \sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+\ldots}}}$$

Mostrare che che vale per $n=0$ e che vale il passo induttivo. Se fosse vero, il valore di (1) sarebbe 2. Perché questa dimostrazione è sbagliata?

4. (DIFFICILE) Mostrare che $\forall 0 < \varepsilon < 2$ esiste un n tale che $\alpha_n > 2-\varepsilon$. [Sugg.: Partendo da $2-\varepsilon$, costruire la radice continua: $2-\varepsilon = \sqrt{1+1(3-2\varepsilon+\varepsilon^2)} = \sqrt{1+1\sqrt{1+2(4-3\varepsilon+\ldots)}} = \ldots$ e trovare una condizione su ε per poter proseguire la costruzione. Notare che si può trascurare ε^2 rispetto a ε, se ε è molto piccolo. Perché?].

5. Trovare il valore di (1), utilizzando quanto sopra riportato.

Chi dovesse riuscire a risolvere tutti i quesiti (compreso l'ultimo...) avrebbe tutta la mia stima. D'altra parte, se non riuscite a risolvere l'ultimo, sappiate che il risultato è stato ottenuto da Ramanujan, il geniale matematico indiano che sosteneva che certi risultati gli venissero suggeriti in sogno da una dea. . . . Ho ottime ragioni per credere che il risultato sia esatto!

Stefano 'Pazqo' Pascolutti
pazqo@libero.it