Frazioni continue e radici continue

1. Dire per quali valori di $n \in \mathbb{N}$, la seguente espressione è un numero intero:
$$\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\dots}}}$$
2. Dire se per qualche valore di $n \in \mathbb{N}$, la seguente espressione è un numero intero:
$$\frac{1}{n+\frac{1}{n+\frac{1}{n+\dots}}}$$
3. Dire se per qualche valore di $n \in \mathbb{N}$, vale la seguente ugualianza:
$$n+\frac{1}{n+\frac{1}{n+\frac{1}{n+\dots}}} = \sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\dots}}}$$
4. Sia $x_n = \underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\dots}}}}_{n}$. Dimostrare che x_n è monotona crescente e converge a un valore finito per ogni $x \in \mathbb{R}^+$.
5. Sia $r(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\dots}}}$, $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Trovare il dominio e il codominio della funzione r.

Probabilità e gioco d'azzardo

In realtà per questo problema non serve conoscere la teoria della probabilità. Basta sapere che la probabilità di un avvenimento è $\frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$. In un gioco, io comincio con 3 monete, il mio avversario con 2. Non si sa come avviene il gioco, ma si sa che ho una probabilità di vittoria pari a $\frac{2}{5}$. Questo significa che su 5 partite, ne vinco, in media, 2. Se vinco rubo una moneta all'avversario. Se perdo, ne ruba lui una a me. Il gioco finisce quando uno dei due termina le monete. Che probabilità ho di vincere? Può essere utile conoscere la formula di Binet per i numeri di Fibonacci:
$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$
dove $F(0)=0$, $F(1)=1$ e $F(n+1)=F(n)+F(n-1)$. Inoltre può essere utile ricordare che $\forall a\colon 0 \le a < 1$, si ha $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

Stefano 'Pazqo' Pascolutti
pazqo@libero.it