Rigate Razionali

Stefano Pascolutti

1 Introduzione

Voglio presentare, in queste poche pagine, una introduzione alle rigate razionali. Queste varietà algebriche si trovano spesso durante gli studi di geometria algebrica e proiettiva e non richiedono un eccessivo bagaglio culturale per essere trattate, pur arrivando a concetti molto generali. Una buona ragione per cui studiare queste superfici è che permettono di vedere tramite esempi la loro utilità in relativamente poco tempo.
In generale, una rigata è un $\mathbb{P}^{n-1}$ - fibrato $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ su una curva $\mathcal{C}$, cioè un fibrato algebrico isomorfo a $U_i \times \mathbb{P}^{n-1}$ su aperti di Zariski piccoli e incollato dalle funzioni di transizione (cocicli) dati dal morfismo $U_i \cap U_j \to \mathrm{PGL}(n)$.
Se non vi è chiaro fino a qui, non disperate. Dopo si chiarisce tutto per bene. O almeno spero. Buona lettura!

2 Definizione di $\mathbb{F}(a_1, \ldots, a_n)$

Iniziamo, ovviamente, dalle definizioni preliminari.
Durante tutto l'articolo sarà implicito il riferimento a un campo $\mathbb{K}$. Quindi, ad esempio, $\mathbb{A}^n$ sarà lo spazio affine di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$. Con questa convenzione, indicherò con $\mathbb{G}_m$ il gruppo moltiplicativo associato al campo $\mathbb{K}$, e quindi $\mathbb{G}_m = \mathbb{K}^\star$.
Consideriamo lo spazio $(\mathbb{A}^2 \setminus 0) \times (\mathbb{A}^n \setminus 0)$, le cui coordinate affini saranno $(t_1, t_2; x_1, \ldots, x_n)$. Fissiamo $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Facciamo agire il gruppo $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ sullo spazio che stiamo considerando nel modo seguente:

$$(\lambda, 1)\colon (t_1, t_2; x_1, \ldots, x_n) \to (\lambda t_1, \lambda t_2; \lambda^{-a_1} x_1, \ldots, \lambda^{-a_n} x_n) \tag{1}$$

e

$$(1, \mu)\colon (t_1, t_2; x_1, \ldots, x_n) \to (t_1, t_2; \mu x_1, \ldots, \mu x_n). \tag{2}$$

A questo punto definiamo $\mathbb{F}(a_1, \ldots, a_n) := (\mathbb{A}^2 \setminus 0) \times (\mathbb{A}^n \setminus 0)/\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$. Cioè identifichiamo $(t_1, \ldots, x_n)$ con $(t'_1, \ldots, x'_n)$ se esiste $(\lambda, \mu) \in \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ tale che $(t_1, \ldots, x_n) = (\lambda, \mu)(t'_1, \ldots, x'_n) = (\lambda t'_1, \ldots, \lambda^{-a_n} \mu x'_n)$.

3 $\mathbb{F}(a_1, \ldots, a_n) = \mathbb{F}$ come fibrato

Notiamo che l'azione di gruppo lascia invariato il rapporto $(t_1 : t_2)$. Quindi la proiezione sulla prima componente nello spazio ambiente si traduce in un morfismo $\pi \colon \mathbb{F} \to \mathbb{P}^1$; graficamente:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{A}^2 \setminus 0) \times (\mathbb{A}^n \setminus 0) \arrow[r] \arrow[d, "pr_1"'] & \mathbb{F} \arrow[d, "\pi"] \\
(\mathbb{A} \setminus 0) \arrow[r] & \mathbb{P}^1.
\end{tikzcd}$$

È abbastanza naturale chiedersi quale sia la fibra su un dato rapporto $(t_1 : t_2)$. Calcoliamo quindi $\pi^{-1}(t_1 : t_2)$. Dato un fissato rapporto $(t1 : t2)$, posso normalizzare un elemento di $\mathbb{F}$ tramite l'azione (1) del primo fattore. Ora, tramite l'azione (2) del secondo fattore, noto che la fibra è costituita dall'insieme dei rapporti $(x_1 : \ldots : x_n)$, che costituisce una copia di $\mathbb{P}^{n-1}$. Quindi $\pi \colon \mathbb{F} \to \mathbb{P}^1$ risulta essere un fibrato con fibra $\mathbb{P}^{n-1}$ e gruppo strutturale il sottogruppo diagonale di $\mathrm{PGL}(n)$. Infatti, fissati $U_0 = (t_2 \neq 0)$ e $U_\infty = (t_1 \neq 0)$, aperti di P^1, possiamo fissare $t_2 = 1$ in U_0 e $t_1 = 1$ in U_∞. Allora $\pi^{-1}(U_0) = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$ (con la coordinata $t_1 = \frac{t_1}{t_2}$ sulla parte affine e le coordinate $(x_1 : \ldots : x_n)$ sulla parte proiettiva) e $\pi^{-1}(U_\infty) = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$ (con le relative coordinate). Rispetto alla prima componente avremo il solito cociclo $t_1 = \frac{1}{t_2}$ sull'intersezione $U_0 \cap U_\infty$. Quindi

$$(t_1 : 1; x_1^0 : \ldots : x_n^0) \xrightarrow{t_1^{-1}} (1 : \frac{1}{t_1}; t_1^{a_1} x_1^0 : \ldots : t_1^{a_n} x_n^0) = (1 : t_2; x_1^\infty : \ldots : x_n^\infty).$$

Quindi l'incollamento sulla seconda componente avviene tramite l'elemento $\mathrm{diag}(t_1^{a_1}, \ldots, t_1^{a_n})$.

4 Funzioni razionali su $\mathbb{F}$

Le funzioni razionali su $\mathbb{F}$ risultano essere i rapporti di polinomi biomogenei che siano anche autofunzioni per l'autovalore 1 rispetto all'azione del gruppo $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$. In pratica vogliamo che siano quelle funzioni razionali dello spazio ambiente $(\mathbb{A}^2 \setminus 0) \times (\mathbb{A}^n \setminus 0)$ che passano "bene" al quoziente.
Siano f, g due polinomi biomogenei nelle variabili $(t_1, t_2; x_1, \ldots, x_n)$. La richiesta precedente equivale a chiedere che

$$(\lambda, \mu) \left(\frac{f(t_1, t_2; x_1, \ldots, x_n)}{g(t_1, t_2; x_1, \ldots, x_n)} \right) = \frac{f(t_1, t_2; x_1, \ldots, x_n)}{g(t_1, t_2; x_1, \ldots, x_n)} \tag{3}$$

La (3) ci da tutte le informazioni che ci servono per sapere come sono fatte le funzioni razionali. Consideriamo innanzitutto i polinomi di bigrado $(m, 0)$. Questi sono della forma $\sum_{i=0}^{m} c_i t_1^{m-i} t_2^i$. Per usare una notazione più stringata (e che ci tornerà utile anche in seguito), indichiamo con $S^a(t_1, t_2) = \{t_1^a, t_1^{a-1}t_2, \ldots, t_2^a\}$. In questo modo, l'insieme dei polinomi di bigrado $(m, 0)$ sarà lo spazio generato da $S^m(t_1, t_2)$: $\langle S^m(t_1, t_2)\rangle$. Vediamo come agisce il gruppo su questo spazio.

- Azione di μ: senza fare troppe verifiche, μ lascia invariati i polinomi di questo spazio.
- Azione di λ: sia $f \in \langle S^m(t_1, t_2)\rangle$ un polinomio omogeneo di grado m nelle t_1, t_2; allora $(\lambda, 1)(f(t_1, t_2)) = f(\lambda t_1, \lambda t_2) = \lambda^m f(t_1, t_2)$.

Tuttavia, se prendo $f, g \in \langle S^m(t_1, t_2)\rangle$, allora $(\lambda, 1)\frac{f(t_1,t_1)}{g(t_1,t_2)} = \frac{\lambda^m f(t_1,t_2)}{\lambda^m g(t_1,t_2)} = \frac{f(t_1,t_2)}{g(t_1,t_2)}$. Quindi $\frac{f}{g}$ è una funzione razionale su $\mathbb{F}$.
Vediamo come si comporta l'azione sui polinomi di bigrado $(0, 1)$, lineari nelle x_i. Consideriamo il polinomio banale $f(t_1, t_2; x_1, \ldots, x_n) = x_1$, che, tuttavia, contiene tutte le idee del caso generale.

- Azione di μ: l'azione di μ non lascia invariato f: $(1, \mu)(f) = \mu x_1 = \mu f$.
- Azione di λ: applicando $(\lambda, 1)$ al polinomio in questione, dobbiamo tenere conto dell'esponente a_1: $(\lambda, 1)(f) = \lambda^{-a_1} x_1 = \lambda^{-a_1} f$.

Consideriamo i due polinomi $f(t_1, t_2; x_1, \ldots, x_n) = x_1$ e $g(t_1, t_2; x_1, \ldots, x_n) = x_2$. Il rapporto $(\lambda, \mu)\frac{f}{g} = \frac{\mu\lambda^{a_1} f}{\mu\lambda^{a_2}} = \lambda^{a_1-a_2}\frac{f}{g}$. Quindi non è sufficiente considerare le funzioni lineari in x_i, a meno di apportare qualche modifica. Notiamo che è sufficiente accompagnare ogni x_i con un polinomio in $\langle S^{a_i}(t_1, t_2)\rangle$. In questo modo cancelliamo l'azione di λ. A conti fatti, risulta che lo spazio dei polinomi che sono lineari nel secondo fattore e che sono autospazi relatvi all'autovalore λ^e ha come base $S^{a_1+e}(t_1, t_n)x_1, S^{a_2+e}(t_1, t_n)x_2, \ldots, S^{a_n+e}(t_1, t_2)x_n$. La dimensione di questo spazio è $\sum^+(a_i + e + 1)$, dove la somma è considerata solo sui termini che sono maggiori di 0.
Vediamo il caso generale dei polinomi di grado d nelle x_i e *extra-grado* e nelle t_i. Questo spazio ha come base i monomi della forma $t_1^{e_1} t_2^{e_2} x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}$ con $\sum d_i = d$ e $e_1 + e_2 = \sum d_i a_i + e$.

5 Il teorema di immersione

Vediamo un teorema che ci permette di vedere $\mathbb{F}$ immerso in $\mathbb{P}^N$, per un opportuno N.

Teorema 5.1. *Supponiamo che siano $a_1, \dots, a_n > 0$; allora i rapporti tra i polinomi biomogenei $S^{a_1}(t_1,t_2)x_1, \dots, S^{a_n}(t_1,t_2)x_n$ definiscono una immersione $\varphi\colon \mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{P}^N$, dove $N = \sum(a_i+1)-1$, in modo che ogni $\mathbb{P}^{n-1}$ - fibra di π si immerga linearmente in un piano di dimensione $n-1$. Inoltre l'immagine $\varphi(\mathbb{F})$ è la sottovarietà di $\mathbb{P}^N$ definita dalle equazioni determinanti*

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_{a_1} & u_{a_1+1} & \dots & u_{a_1+a_2+1} & \dots & u_N \\ u_2 & u_3 & \dots & u_{a_1+1} & u_{a_1+2} & \dots & u_{a_1+a_2+2} & \dots & u_{N+1} \end{pmatrix} \leq 1 \qquad (4)$$

Prima di procedere con la dimostrazione, osserviamo che la (4) equivale a chiedere che $\frac{u_1}{u_2} = \frac{u_2}{u_3} = \ldots = \frac{u_N}{u_{N+1}}$ e si può scrivere anche nel seguente modo, a patto di considerare $u_1 = t_1^{a_1}x_1, u_2 = t_1^{a_1-1}t_2x_1, \dots, u_{N+1} = t_2^{a_n}x_2$:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{t_1^{a_1}x_1}{t_1^{a_1-1}t_2x_1} = \frac{t_1^{a_1-1}t_2x_1}{t_1^{a_1-2}t_2^2x_1} = \ldots = \frac{t_1t_2^{a_n-1}x_n}{t_2^{a_n}x_n} \qquad (5)$$

Dimostrazione. Consideriamo il ricoprimento aperto di $\mathbb{F}$ dato dagli U_{ij} con $i = 1, 2$ e $j = 1, \dots, n$, dove $U_{ij} = (t_i \neq 0, x_j \neq 0)$. Ciascun U_{ij} è isomorfo a $\mathbb{A}^n$. Studiamo il pezzo U_{11} che contiene tutte le idee del caso generale. Le n coordinate affini saranno $\frac{t_2}{t_1}$ e $t^{a_i-a_1}\frac{x_i}{x_1}$ per $i = 2, \dots, n$. Tra i monomi che stiamo considerando, ci sono $t_1^{a_1}x_1, t_1^{a_1-1}t_2x_1, t_1^{a_2}x_2, \dots, t_n^{a_n}$. Il primo di questi è non-zero ovunque su U_{11}. Quindi, dividento per questo, otteniamo esattamente le coordinate cercate, che pertanto sanciscono l'immersione di U_{11}. Inoltre, se $u_1 = 1$, allora tutte le coordinate successive sono determinate da $u_2, u_{a_1+2}, u_{a_1+a_2+3}, \dots$ che corrispondono al sottoinsieme dei polinomi considerato al caso precedente.

□

Possiamo vedere le rigate anche in un altro modo, dal punto di vista della geometria proiettiva.
Consideriamo una copia di $\mathbb{P}^1$ con coordinate omogenee $(t_1 : t_2)$ e n immersioni $v_{a_i}\colon \mathbb{P}^1 \hookleftarrow \mathbb{P}^{a_i}$ definite da

$$(t_1 : t_2) \mapsto (t_1^{a_i} : t_1^{a_i-1}t_2 : \ldots : t_2^{a_i}).$$

Questa è l'a_i - esima immersione di Veronese e l'immagine $\Gamma_i = v_{a_i}(\mathbb{P}^1)$ è la curva normale razionale di grado a_i. Immergendo tutti i $\mathbb{P}^{a_i}$ in P^N come sottospazi indipendenti, possiamo prendere lo spazio generato dai rispettivi punti sulle Γ_i; questo spazio è esattamente la nostra $\mathbb{F}$.

6 Esempi

- $\mathbb{F}(1,0)$ è una superficie rigata e $\varphi\colon \mathbb{F}(1,0) \to \mathbb{P}^2$ è lo scoppiamento di un punto

- $\mathbb{F}(2,1)$ è la rigata cubica
- $\mathbb{F}(2,0) \to Q' \subset \mathbb{P}^3$ è la risoluzione standard del cono quadrico ordinario.
- $\varphi\colon \mathbb{F}(a,0) \to \bar{\mathbb{F}}_a \subset \mathbb{P}^a$ è lo scoppiamento del cono su una curva normale razionale.

7 Struttura dei divisori

Lemma 7.1. *La classe dei divisori della rigata $\mathbb{F}$ è il gruppo libero abeliano*

$$\mathrm{Pic}(\mathbb{F}) = \mathbb{Z}L \oplus \mathbb{Z}M,$$

dove L è la classe di una fibra di π e M è la classe di un qualsiasi monomio $t_1^b t_2^c x_i$ con $b + c = a_i$.

Prima di iniziare la dimostrazione, è bene richiamare la nozione di divisore. O meglio, *le* nozioni di divisore.
Infatti possiamo definire i *divisori di Cartier* e i *divisori di Weil.*

Definizione 7.1. *D è un divisore di Weil per la superficie $\mathcal{S}$, $D \in \mathrm{Weil}(\mathcal{S})$, se D è un elemento dello $\mathbb{Z}$ - modulo libero generato dalle curve algebriche contenute in $\mathcal{S}$. Cioè $D = \sum_{i=1}^n m_i\mathcal{C}_i$ con $m_i \in \mathbb{Z}$ e $\mathcal{C}$ curva irriducibile in $\mathcal{S}$.*

Definizione 7.2. *Un divisore di Cartier per la superficie $\mathcal{S}$ è il dato di un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di $\mathcal{S}$ e di una famiglia $\{f_\alpha\}$ (equazioni locali per il divisore) tali che:*

1. *f_α è una funzione regolare su $\mathcal{S}$*
2. *$\forall \alpha, \beta$ esiste una funzione birazionale $g_{\alpha\beta}$ tale che $f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta$.*

Sulle varietà liscie le due nozioni sono equivalenti. Infatti dato $D \in \mathrm{Weil}(\mathcal{S})$, $D = \displaystyle\sum_{i=1}^{h} n_i\mathcal{C}_i - \sum_{j=1}^{k} m_j\mathcal{C}_j$, dove $n_i, m_i > 0$, il divisore di Cartier corrispondente è dato, su U_α, da $\dfrac{\prod_{i=1}^h \widehat{\mathcal{C}}_i^{n_i}}{\prod_{j=1}^k \widehat{\mathcal{C}}_j^{m_j}}$ dove le $\widehat{\mathcal{C}}$ sono le restrizioni di $\mathcal{C}$ a U_α. Dato che la $\mathbb{F}$ è liscia, userò indifferentemente le due nozioni; tuttavia, visto che il lemma è dato con la notazione di gruppo libero, questo implica un'attenzione particolare dell'autore ai divisori di Weil. Ricordo, inoltre, che le curve irriducibili su $\mathbb{F}$ sono esattamente i polinomi biomogenei definiti al paragrafo 4.

Dimostrazione. La dimostrazione di compone di tre punti: prima mostriamo che le classi dei divisori L e M sono ben definite; poi vediamo che sono indipendenti e infine vediamo che generano $\mathrm{Pic}(\mathbb{F})$.
Iniziamo mostrando che due fibre di $\pi\colon \mathbb{F} \to \mathbb{P}^1$ sono linearmente equivalenti; cioè posso passare dall'una all'altra per mezzo di una funzione razionale. Ma ciò è vero perché una fibra di π ha equazione $f(t_1, t_2) \in S^1(t_1, t_2)$. Quindi posso passare a una fibra di equazione $g(t_1, t_n)$ moltiplicando per la funzione razionale $\frac{g(t_1,t_2)}{f(t_1,t_2)}$. Quindi $f(t_1, t_2) \sim g(t_1, t_2)$. Per quanto riguarda M, questa è la classe di un monomio $t_1^b t_2^c x_i$ con $b + c = a_i$. Se $a_i > 0$ per ogni i, allora M è la classe dei divisori della sezione iperpiana rispetto all'immersione vista nel teorema 5.1. Consideriamo $F_i \subset \mathbb{F}$, il luogo definito da $x_i = 0$. $F_i = \mathbb{F}(a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n)$ e quindi osserviamo che la funzione razionale $\frac{t_1^{a_i} x_i}{t_2^{a_j} x_j}$ corrisponde esattamente al rapporto tra due monomi della forma considerata. Inoltre possiamo vedere $\frac{t_1^{a_i} x_i}{t_2^{a_j} x_j}$ come il divisore di Weil $(a_i L + F_i) - (a_j L + F_j)$.
Vediamo che L e M sono indipendenti. Infatti è sufficiente condiderare $aL + bM \sim 0$ e restringerci a una fibra di π, che dà $b = 0$; e quindi $a = 0$.
Per quanto riguarda il passo conclusivo della dimostrazione, dobbiamo mostrare che ogni divisore di $\mathbb{F}$ è linearmente equivalente a $aL+bM$ per qualche $a, b \in \mathbb{Z}$. Consideriamo la curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{F}$, che è una sottovarietà irriducibile di codimensione 1 definita da una singola equazione polinomiale biomogenea. Se $\mathcal{C}$ è definita da f con bigrado assegnato, allora possiamo ottenere una funzione birazionale dividendo per un monomio $t_1^{a_1 d+e} x_1^d$ con lo stesso bigrado. In questo modo $f = \frac{f}{t_1^{a_1 d+e} x_1^d} t_1^{a_1 d+e} x_1^d$ e quindi $f \sim t_1^{a_1 d+e} x_1^d$. Quindi, passando ai divisori di Weil, $\mathcal{C} \sim eL + dM$.

□

8 Sottorigate negative

Introduciamo il sistema lineare $|eL + dM|$ su $\mathbb{F}$, che è l'insieme dei divisori che sono linearmente equivalenti a $eL + dM$. Praticamente un elemento di questo spazio è parametrizzato dai polinomi che hanno grado d nelle x_i e extra-grado e nelle t_i. Supponiamo $d > 0$.

Definizione 8.1. *Dato il sottoinsieme $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_m}\} \subset \{a_1, \dots, a_n\}$, definiamo la sottorigata relativa a quel sottoinsieme $\mathbb{F}' = \mathbb{F}(a_{i_1}, \dots, a_{i_m}) \subset \mathbb{F}$ come il sottospazio definito dalle equazioni $x_j = 0$ per ogni $j \notin \{a_{i_1}, \dots, a_{i_m}\}$. $\mathbb{F}'$ è una rigata e ha come coordinate biomogenee $(t_1 : t_2; x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$.*

Definizione 8.2. *Per ogni b, definiamo la sottorigata negativa $B_b \subset \mathbb{F}$ come la sottorigata relativa all'insieme $\{a_i | a_i \leq b\}$. Per praticità, supponiamo che*

$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. Allora $B_b = \mathbb{F}(a_1, \ldots, a_m) \subset \mathbb{F}$, dove m è determinato da $a_1 \leq \ldots \leq a_m \leq b < a_{m+1} \leq \ldots a_n$.

Teorema 8.1. *1. Il luogo base del sistema $|-(b+1)L+M|$ è esattamente la sottorigata B_b.*

2. Supponiamo che $b = a_m$. Allora B_b è contenuto con molteplicità $< \mu$ nel luogo base di $eL + dM$ se e solo se

$$e + bd + (a_n - b)(\mu - 1) \geq 0 \tag{6}$$

Il contenuto del teorema è chiaro: B_b tende a essere il luogo base dei sistemi lineari che stiamo considerando.

Dimostrazione. Un elemento del sistema lineare $|eL+M|$ è una ipersuperficie di $\mathbb{F}$ definita da una forma $f \in \langle S^{a_i+e}(t_1, t_2)x_i \rangle$, cioè è somma di monomi di grado 1 nelle x_i e extra-grado e nelle t_i. Ma se $a_i \leq b \leq -e$, allora x_i non appare in tale somma. Quindi f si annulla solo sul luogo $x_{m+1} = \ldots = x_n = 0$. Per quanto riguarda il punto 2, un elemento di $|eL + dM|$ è definito da un polinomio biomogeneo di grado d nelle x_i e extragrado e nelle t_i. Inoltre, i monomi di grado $\geq \mu$ nelle $x_{m+1}, \ldots, x_n$ si annullano con molteplicità (almeno) μ lungo B_b. Quindi dobbiamo dimostrare che la condizione (6) vale se e solo se esiste un monomio di bigrado d, e di grado $< \mu$ nelle $x_{m+1}, \ldots, x_n$. Prendiamo un monomio di grado d nella forma $x_m^{d-\mu+1}x_n^{\mu-1}$; questo deve essere accompagnato da un monomio in t_1, t_2 di grado $e + a_m(d - \mu + 1) + a_n(\mu - 1)$. Inoltre questo è il più alto grado che può accompagnare i monomi che stiamo considerando.

□

9 Superfici ellittiche

Vediamo una applicazione del teorema 8.1. Sia $\mathbb{F} = \mathbb{F}(a_1, a_2, a_3) \to \mathbb{P}^1$ una rigata cubica con $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ e sia $X \subset \mathbb{F}$ una superficie che incontra la fibra di $\mathbb{F} \to \mathbb{P}^1$ in una curva cubica non singolare. Allora $X \in |(k + 2 - \sum a_i)L + 3M|$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Posso mandare $(a_1, a_2, a_3) \mapsto (a_1 - \nu, a_2 - \nu, a_3 - \nu)$, per qualche $\nu \in \mathbb{Z}$ e $M \mapsto M - \nu L$ senza modificare la classe di X. Quindi, per semplificare i conti, assumerò $a_1 = 0$.
Scriviamo l'equazione di X esplicitamente:

$$\sum_{i+j+l=3} c_{ijl}(t_1, t_2)x_1^i x_2^j x_3^l, \tag{7}$$

dove $\deg c_{ijl} = (k + 2 - \sum a_i) + ia_1 + ja_2 + la_3$. Questi coefficienti possono essere disposti nel seguente modo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 2a_1 - a_2 - a_3 & & & \\ & & a_1 - a_3 & & a_1 - a_2 & & \\ & a_2 - a_3 & & 0 & & -a_2 + a_3 & \\ -a_1 + 2a_2 - a_3 & & -a_1 + a_2 & & -a_1 + a_3 & & -a_1 - a_2 + 2a_3, \end{array}$$

Dove a ogni entrata va aggiunto un $k + 2$.

Affinché X sia non-singolare, il suo luogo base è ristretto da due condizioni: $B_{a_2} \not\subset X$ e $2B_{a_1} \not\subset X$. Queste condizioni ci dicono che la fibra $X \to \mathbb{P}^1$ non si spezza in una conica più una retta e non ha $(1, 0, 0)$ come punto doppio. In particolare, nello schema qua sopra, almeno uno dei valori sul lato sinistro è ≥ 0 e precisamente $k + 2 - a_1 + 2a_2 - a_3 \geq 0$; ed è ≥ 0 anche uno dei valori del triangolo superiore.
In questo modo la condizione (6) del teorema 8.1 ci dice che

$$(k + 2 + \sum a_i) + 3b + (a_n - a_m)(\mu - 1) \geq 0,$$

e quindi possiamo giungere alle seguenti conclusioni:

- $B_{a_2} \not\subset X$: $b = a_2$, $\mu = 1$ e quindi $(k+2-\sum a_i)+3a_2+0\cdot(a_3-a_2) \geq 0$; ponendo $a_1 = 0$, abbiamo che $a_2 + k + 2 \geq a_3 - a_2 \geq 0$.

- $2B_{a_1} \not\subset X$: $b = a_1$, $\mu = 2$ e quindi $(k + 2 - \sum a_i) + 3a_1 + (a_3 - a_1)$; ponendo $a_1 = 0$, abbiamo che $k + 2 \geq a_2 \geq 0$.

Fissato un valore di k, le due condizioni portano ai seguenti valori per a_2, a_3: $a_2 = 0, \ldots, k + 2$ e $a_3 = a_2, \ldots, 2a_2 + k + 2$.
Vediamo, infine, il caso estremo, in cui $a_2 = k + 2$ e $a_3 = 3(k + 2)$. In questo caso i coefficienti di x_2^3 e $x_1^2 x_3$ sono polinomi omogenei in t_1, t_2 di grado 0, cioè costanti. Quindi X ha equazione $1 \cdot x_2^3 + 1 \cdot x_1^2 x_3 + \mathit{altro}$. Quindi $X \subset \mathbb{F}$ è una superficie non singolare e ogni fibra è la forma normale di Weierstrass di una curva ellittica.